



## Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton

Frøbert Jensen, Jesper; Nielsen, Mogens Peter

*Publication date:*  
1981

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Frøbert Jensen, J., & Nielsen, M. P. (1981). *Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-141

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Department of Structural Engineering  
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

Plasticitetsteoretiske Løsninger  
for  
Skiver og Bjælker af Jernbeton

Jesper Frøbert Jensen

Serie R

No 141

1981

PLASTICITETSTEORETISKE LØSNINGER

FOR

SKIVER OG BJÆLKER AF JERNBETON

JESPER FRØBERT JENSEN

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER, DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

1981

# FORORD

Nærværende rapport er udarbejdet som led i betingelserne for opnåelse af den tekniske licentiatgrad. Faglærer under licentiatstudiet har været professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen, som takkes for godt samarbejde.

Forfatteren ønsker endvidere at takke alle de medarbejdere ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, som hjælpsomt har bistået ved rapportens udgivelse.

Lyngby, November 1981

Jesper Frøbert Jensen

## SYNOPSIS

Rapporten behandler ad teoretisk vej skiver og bjælker af jernbeton i brudstadiet, idet beton og armering betragtes som stive, idealt plastiske materialer. Coulombs modificerede brudhypotes anvendes som brudbetingelse for betonen.

Brudlinier i skiver af Coulombmaterialer behandles på generel form, og de optimale brudlinieforløb bestemmes.

Der opstilles løsninger for forskellige belastninger på skiver/bjælker med forskellige armeringsarrangementer.

Arbejdet er for praktiske anvendelser af særlig interesse i forbindelse med bjælker, og herfor gennemgås en designmetode, der baserer sig på de udviklede løsninger med en indført empirisk korrektion.

## ABSTRACT

The report treats theoretically discs and beams of reinforced concrete in the ultimate state. Concrete and reinforcement are assumed to be rigid-plastic, and for the concrete the modified Coulomb failure criterion is adopted.

Yield lines in discs of Coulomb materials are analysed in general, and the optimal yield line forms are determined.

Solutions are found for different loading cases for discs/beams with various arrangements of reinforcement.

The work is for the use in practice of special interest in relation to beams, and for this, a design method is described. This method is based on the developed solutions, corrected empirically.

## INDHOLDSFORTEGNELSE:

	Side
1. INDLEDNING	1
2. TEORETISK OG FYSISK BAGGRUND	3
2.1 Fra den generelle plasticitetsteori	3
2.2 Brudbetingelse for beton	6
2.3 Brudbetingelse for armering	7
3. BRUDLINIER I SKIVER	8
3.1 Brudlinier i uarmerede betonskiver	8
3.1.1 Lokal dissipation i brudlinie	8
3.1.2 Brudlinier ved vilkårlige stift- legemebevægelser i planen	12
3.1.3 Eksempel	20
3.2 Brudlinieforløb i skive af Coulombmate- riale med vilkårlig trækstyrke	23
3.3 Brudlinier i skiver af Træcamateriale	29
3.4 Brudlinier i skiver af v. Miesesmateriale	31
4. SKIVER/BJÆLKER UDEN FORSKYDNING SARMERING	33
4.1 Koncentreret last	33
4.1.1 Nedrevarldi for stærk langdearmring	33
4.1.2 Øvrevarldi for stærk langdearmring	42
4.1.3 Langdearmringens indflydelse	49
4.2 Jævnt fordelt last	55
4.2.1 Nedrevarldiløsning	56
4.2.2 Øvrevarldiløsning	61
4.3 Koncentreret last og central normalkraft	63
4.3.1 Nedrevarldiløsning	64
4.3.2 Øvrevarldiløsning	67

5. SKIVER/BJÆLKER MED FORSKYDNINGSSARMERING	70
5.1 Koncentreret last, lodrette bøjler	70
5.1.1 Nedreværdiløsning	71
5.1.2 Øvre værdiløsning	79
5.1.3 Længdearmringens indflydelse	81
5.2 Jævnt fordelt last, lodrette bøjler	84
5.2.1 Nedreværdiløsning	85
5.2.2 Øvre værdiløsning	92
5.3 Koncentreret last, skrå bøjler	94
5.3.1 Nedreværdiløsning	95
5.3.2 Øvre værdiløsning	98
5.4 Jævnt fordelt last, skrå bøjler	101
5.4.1 Nedreværdiløsning	101
5.4.2 Øvre værdiløsning	105
6. BETYDNING AF BETONENS TRÆKSTYRKE VED SKIVER/ BJÆLKER UDEN FORSKYDNINGSSARMERING	108
6.1 Skive med koncentreret last	109
6.1.1 Nedreværdiløsning	109
6.1.2 Øvre værdiløsning	114
7. SAMMENLIGNING MED FORSØG	118
7.1 Betons effektive styrke	118
7.2 Bjælker uden forskydningsarmring	119
7.3 Bjælker med forskydningsarmring	125

8. ANVENDELSER	129
8.1 Bjælker uden forskydningsarmring	129
8.1.1 Eksempel	131
8.2 Bjælker med forskydningsarmring	134
8.2.1 Eksempel	141
9. RESUMÉ	146
10. NOTATION	149
11. REFERENCER	151

## 1. INDLEDNING

I rapporten opstilles en række teoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. Løsningerne er alle baseret på plasticitetsteorien, idet armering og beton betragtes som stive, idealt plastiske materialer. Som brudbetingelse for betonen anvendes Coulombs modificerede brudhypotese.

Både bjælker og skiver behandles ved opstillingen af løsningerne som matematisk ideelle skiver. Grænsen mellem de to typer konstruktionselementer er ret flydende; men som en rettesnor kan anføres, at skiver af jernbeton konstruktivt vil være forsynet med en orthotrop, fordelt armering. Når en sådan armering forefindes, bør den tages med i brudstadieberegningen, således som det er gjort i [71.1]. Med løsningerne i denne rapport, som ikke omfatter skiver med fordelt vandret armering, er det praktiske mål udelukkende en behandling af jernbetonbjælker. Så selv om meget i det teoretiske arbejde også vil kunne finde anvendelse ved behandling af jernbetonskiver, er rapportens afsluttende kapitler med forsøgssammenligning og demonstration af praktiske anvendelser koncentreret om bjælker.

Blandt de ting, der kan få betydning udover behandlingen af bjælkeproblemer, skal indholdet af rapportens kapitel 3 fremhæves. Dette kapitel omfatter en generel analyse af brudlinier i skiver af vægtløse Coulombmaterialer, og resultaterne herfra ventes at åbne for opstilling af flere eksakte løsninger fremover.

I kapitlerne 4 og 5 behandles skiver/bjælker henholdsvis uden og med forskydningsarmering. En stor del af løsningerne vil være velkendte, se specielt [78.1]; men kapitlerne indeholder også i væsentligt omfang løsninger og delløsninger, som forfatteren bekendt er nye. Løsningerne i disse to kapitler er opstillet uden hensyntagen til betonens trækstyrke i overensstemmelse med gældende praksis for brudstadiedimensionering af jernbetonbjælker.

Trækstyrkens indflydelse på bæreevnen er i kapitel 6 gennemgået teoretisk for et enkelt eksempel. Dette er gjort af hensyn til den senere tolkning af forsøgsresultaterne.

Sammenligningen mellem de centrale teoretiske løsninger og forsøgsresultater er indeholdt i kapitel 7, der kort refererer det empiri-

ske arbejde fra [78.1] og [79.1].

Endelig er det i kapitel 8 vist, hvorledes der af teorien kan udvikles en for praksis bekvem og anvendelig designmetode for jernbetonbjælker.

## 2. TEORETISK BAGGRUND

Som udgangspunkt for rapportens teoretiske løsninger forudsættes materialerne at være stift, idealt plastiske. Endvidere skelnes ikke under den teoretiske del af arbejdet mellem jernbetonskiver og jernbetonbjælker, idet spændingstilstanden i både skiver og bjælker forudsættes at være plan.

### 2.1 Fra den generelle plasticitetsteori

Et materials flydebetingelse er et udtryk for de kombinationer af spændinger, der muliggør flydning i materialet. Såfremt materialet er isotropt, kan flydebetingelsen udtrykkes som en ligning i hovedspændingerne på formen:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.1.1)$$

Funktionen  $f$  i (2.1.1) indføres således, at hvis en hovedspændingskombination, der ikke kan fremkalde flydning i materialet, indsættes i  $f$ , bliver  $f < 0$ . Spændingstilstande, der således til  $f > 0$ , kan ikke optræde i materialet.

Afbildet i et  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ -koordinatsystem kaldes punktmængden, der bestemmes af (2.1.1), for materialets flydeflade, og denne forudsættes at være konveks.

I plasticitetsteorien optræder endvidere en antagelse om tøjningernes sammenhang med spændingstilstanden. Den pågældende antagelse udtrykkes, at hvis der er forelagt en tøjningstilstand,  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ , da vil spændingstilstanden,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  indrettes sig, så det specifikke plastiske arbejde, også kaldet den specifikke dissipation, bliver størst muligt. Det specifikke plastiske arbejde er:

$$W = \epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 \sigma_2 + \epsilon_3 \sigma_3 \quad (2.1.2)$$

Antagelsen om den indbyrdes sammenhang mellem tøjninger og spændinger kan matematisk udtrykkes ved hjælp af funktionen  $f$  fra (2.1.1) ved



$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \bar{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right) \quad (2.1.3)$$

Se nærmere i f.eks. [59.1]. Faktoren  $\bar{\lambda}$  i (2.1.3) må opfylde

$$\bar{\lambda} \geq 0 \quad (2.1.4)$$

når det om det specifikke plastiske arbejde i (2.1.2) kræves, at

$$w \geq 0$$

og flydefladen er forudsat konveks.

Afbildes  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  som en vektor i  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ -koordinat-systemet, ses af (2.1.3), at denne vektor afsat i det tilhørende punkt,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , udgør en udadrettet normal til flydefladen, når  $\bar{\lambda} > 0$ . Punktet  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  må ifølge flydebetingelsen netop ligge på flydefladen, hvis  $\bar{\lambda} > 0$ . På grund af den således mulige geometriske tolkning kaldes relationen (2.1.3) ofte "normalitetsbetingelsen", men også betegnelsen "den associerede flydelov" anvendes hyppigt.

Hvor flydefladen ikke er differentiabel kan tøjningerne ikke bestemmes ved (2.1.3), og da kræves i stedet, at tøjningsvektoren ved den ovenfor omtalte afbildning ligger i vinkelrummet mellem grænsenormalerne til de tilstødende flader, som udgør flydefladen omkring det pågældende sted.

Strengt taget kan flydeloven ikke udsige noget om tøjningernes absolutte størrelser, men kun om tøjningstilvækster. Betragtes imidlertid kun brudøjeblikket og opfattes tøjningerne  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  kun som en beskrivelse af de infinitesimale deformationer, der indtræder i brudøjeblikket, så er skelen mellem tøjninger og tøjningstilvækster unødvendig.

Når normalitetsbetingelsen forudsættes gældende, kan plasticitetsteoriens ekstremalprincipper bevises, se [59.1] eller [73.4]. Disse ekstremalprincipper omfatter øvrevardebetningen, nedrevardebetningen samt entydighedsbetningen, og de anføres her uden bevis. Til hjælp ved formuleringen af principperne opskrives først nogle definitioner:

En statisk mulig spændingstilstand er en spændingstilstand, der

overalt opfylder ligevægtsbetingelserne og de statiske randbetingelser.

En sikker spændingstilstand er en spændingstilstand, der overalt leder til  $f \leq 0$ .

En kinematisk mulig brudfigur består i et flytningsfelt, der overalt opfylder de geometriske randbetingelser.

Flydelasten er for et stift, idealt plastisk legeme den laveste belastning, der kan fremkalde deformationer.

Herefter kan ekstremalprincipperne opskrives som følger:

Øvrevardebetningen: En belastning fundet ved hjælp af arbejdslikningen for en kinematisk mulig brudfigur er større end eller lig med flydelasten.

Nedrevardebetningen: En belastning bestemt på basis af en statisk mulig, sikker spændingstilstand er mindre end eller lig med flydelasten.

Entydighedsbetningen: En belastning, der både kan bestemmes ved hjælp af arbejdslikningen for en kinematisk mulig brudfigur og på basis af en statisk mulig, sikker spændingstilstand, er lig med flydelasten.

Kaldes den ydre belastnings arbejde ved en given brudfigur for  $w_E$ , og betegner  $w_I$  det tilhørende indre arbejde bestemt som volumenintegralet af (2.1.2) over hele legemet, kan den omtalte arbejdslikning skrives som

$$w_E = w_I \quad (2.1.5)$$

Spændingerne, der indgår i (2.1.2), bestemmes ud fra de til brudfiguren svarende tøjninger i overensstemmelse med normalitetsbetingelsen.

En belastning bestemt ved at løse (2.1.5) kaldes en øvrevardebetning, og tilsvarende kaldes en belastning bestemt i overensstemmelse med princippet anført i nedrevardebetningen for en nedrevardebetning.

Ovenstående rids af plasticitetsteoriens grundlag er formuleret ved hjælp af hovedtøjninger og hovedspændinger. For mere generel-



### 3. BRUDLINIER I SKIVER

Her og i det følgende behandles forskellige idealiserede plastiske skiver i brudstadiet. Indholdet af dette kapitel er beregninger af mere generel art til hjælp ved opstilling af øvregrænseløsninger for de senere behandlede skiveproblemer.

#### 3.1 Brudlinier i uarnerede betonskiver

##### 3.1.1 Lokal dissipation i brudlinje

Til indledning betragtes en zone af bredden  $\Delta$  beliggende mellem to skivedele, I og II, som vist på figur 3.1a. Den nævnte zone tænkes deformeret ved, at skivedel II som et stift legeme trans-

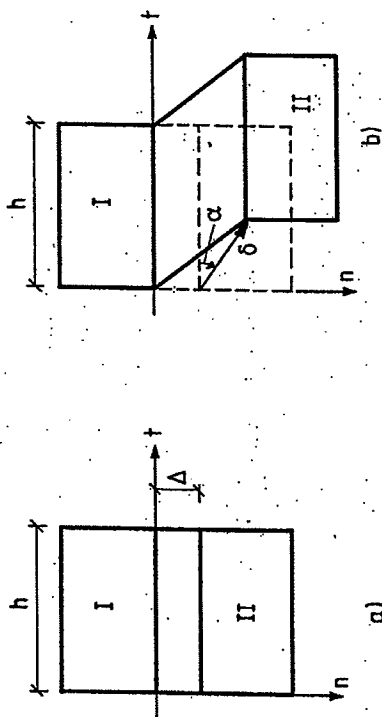


Fig. 3.1. Deformeret zone mellem to skivedele.  
a): før deformationen. b): efter deformationen.

lateres stykket  $\delta$  i forhold til skivedel I, der ligeledes forbliver stiv. Se figur 3.1b.

I den deformerede zone regnes tøjningstilstanden at være homogen, så ved hjælp af det retvinklede  $(n, t)$ -koordinatsystem kan tøjningstilstanden overalt i zonen beskrives ved

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\delta}{\Delta} \sin \alpha \\ \epsilon_t &= 0 \\ \phi_{nt} &= 2\gamma_{nt} = \frac{\delta}{\Delta} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Af dette findes hovedtøjningerne ved brug af transformationsformlerne:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha + 1) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

Når hovedtøjningerne således er kendte, kan de tilhørende hovedspændinger bestemmes ved hjælp af den associerede flydelov, se figur 2.1. For  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  er  $\epsilon_1 > 0$  og  $\epsilon_2 = 0$ . Derfor må de tilhørende hovedspændinger ifølge flydeloven være repræsenteret ved et punkt på stykket OP af flydefladen fra figur 2.1.

Det vil sige, at

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ -f_c^* &\leq \sigma_2 \leq 0 \end{aligned} \right.$$

For  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  er  $\epsilon_1 > 0$  og  $\epsilon_2 < 0$ . Dette medfører, at de tilhørende hovedspændinger repræsenteres ved punktet P på flydefladen, således at

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= -f_c^* \end{aligned} \right.$$

Dersom  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  er  $\epsilon_1 = 0$  og  $\epsilon_2 < 0$ , hvilket betyder, at de tilhørende hovedspændinger repræsenteres ved et punkt på stykket PQ af flydefladen. Altså gælder

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -f_c^* &\leq \sigma_1 \leq 0 \\ \sigma_2 &= -f_c^* \end{aligned} \right.$$

Med kendskab til både hovedtøjninger og hovedspændinger kan den samlede dissipation i den deformerede zone let findes, da hoved-

retningerne for tøjninger og spændinger er sammenfaldende. Dissipationen bliver

$$w_I = \int_V (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2) dV$$

Benævnes skivetykkelsen  $b$ , fås:

$$w_I = \begin{cases} \Delta h b \left[ \frac{\delta}{\Delta} \cdot 0 + 0 \cdot \sigma_2 \right] & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \Delta h b \left[ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha + 1) \cdot 0 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha - 1) \cdot (-f^*) \right] - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \Delta h b \left[ 0 \cdot \sigma_1 + \left( -\frac{\delta}{\Delta} \right) (-f^*) \right] & \alpha = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Disse tre udtryk kan sammenfattende skrives som

$$w_I = \frac{1}{2} \delta h f^* (1 - \sin \alpha) \quad (3.1.3)$$

Af symmetri Grunde gælder det fundne udtryk for dissipationen også for  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ , og (3.1.3) kan således anvendes ved enhver mulig translation af skivedel II i forhold til skivedel I.

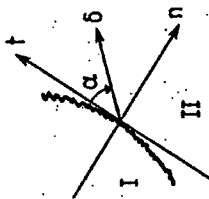
Det bemærkes, at (3.1.3) er uafhængig af størrelsen  $\Delta$ , den deformationens zoner bredde. Uden at den samlede dissipation i zonen ændres for en given indbyrdes bevægelse mellem de to skivedele, I og II, kan man således lade  $\Delta \rightarrow 0$ . Herved udarter zonen til en linie, en såkaldt brudlinje.

Dissipationen pr. længdeenhed af brudlinjen, eller den lokale dissipation i brudlinjen, fås af (3.1.3) ved division med størrelsen  $h$ :

$$w_I = \frac{1}{2} \delta b f^* (1 - \sin \alpha) \quad (3.1.4)$$

Det er naturligvis kun et specialtilfælde, der er gennemgået i det foregående. I det generelle tilfælde er den indbyrdes bevægelse mellem de to skivedele I og II ikke nødvendigvis givet ved en translation, og tilsvarende vil brudlinjen ikke altid være retlinet. Det generelle tilfælde er illustreret på figur 3.2, hvor

( $n, t$ ) - koordinatsystemet svarende til det på fig. 3.1 viste er indlagt med origo i et punkt på brudlinjen, således at  $n$ -aksen udgør brudlinjens normal i punktet. Nu må både  $\delta$  og  $\alpha$  regnes at variere langs brudlinjen, men dissipationen bestemmes stadig lokalt ved (3.1.4), og den samlede dissipation findes derfor ved at integrere (3.1.4) op langs brudlinjen, se afsnit 3.1.2.



Figur 3.2: Brudlinje i betonskive. Brudlinjer markeres med bølgelinje.

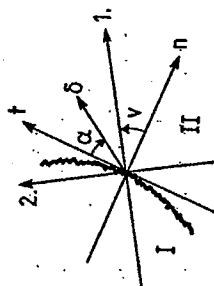
Under bestemmelsen af den lokale dissipation i brudlinjen fandtes størrelsen af hovedtøjningerne, (3.1.2). Af (3.1.1) er det også muligt at finde retningen af disse hovedtøjninger. Drejningsvinklen  $v$ , fra den indførte  $n$ -akse til 1. hovedtøjningsretning er nemlig givet ved

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{2 \gamma_{nt}}{\varepsilon_n - \varepsilon_t} = \cot \alpha$$

altså er

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Dette betyder, at 1. hovedtøjningsakse overalt halverer vinklen mellem brudlinjens normal og den relative bevægelsesvektor. Da hovedakserne for tøjninger og spændinger er sammenfaldende, gælder det samme for spændingernes 1. hovedakse. Se illustrationen på figur 3.3.



Figur 3.3: Hovedretninger for tøjninger og spændinger i brudlinie.

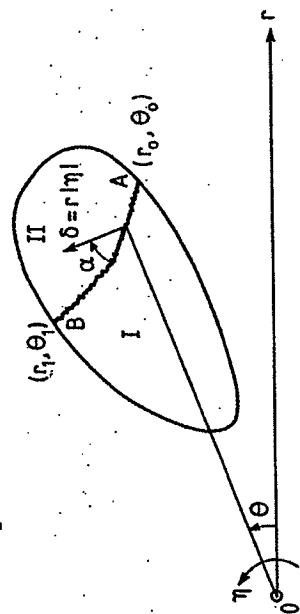
### 3.1.2 Brudlinier ved vilkårlige stiftlegemebevægelser i planen

Betonskiven fra figur 3.4 betragtes, og det antages, at der dannes en brudlinie mellem de to punkter A og B på skivens rand, idet skivedelen benævnt II bevæger sig som et stift legeme i planen i forhold til skivedelen benævnt I.

Det forudsættes, at der ikke angriber nogen ydre last inden for den betragtede skives rand. Skiven regnes således vægtløs.

På figur 3.4 er der indlagt et polært  $(r, \theta)$ -koordinatsystem med pol i O. I dette system tillægges punkt A koordinaterne  $(r_0, \theta_0)$  og punkt B koordinaterne  $(r_1, \theta_1)$ .

Uden praktisk indskrænkning antages skiven at være af endelig udstrækning, hvorved den relative bevægelse af del II i forhold til del I generelt kan beskrives som en drejning om et punkt, O, i planen. Denne drejning betegnes  $\eta$  og regnes med fortegn efter det polare koordinatsystems omløbsretning.

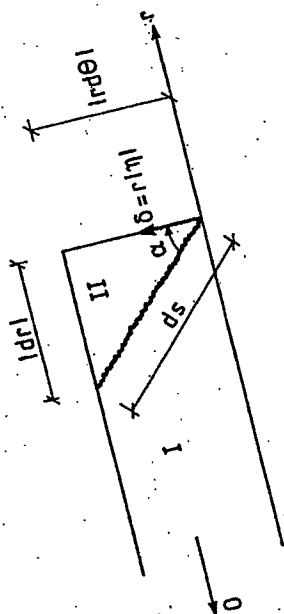


Figur 3.4: Brudlinie i betonskive.

Hvor brudlinien ikke udgøres af en polstråle, kan den beskrives ved en funktion af formen

$$r = r(\theta) \quad (3.1.5)$$

Dersom O ligger således i forhold til brudlinien, at enhver polstråle, der krydser brudlinien, peger ind i skivedel II, kan forholdene omkring en infinitesimal del af brudlinien illustreres som vist på figur 3.5.



Figur 3.5: Infinitesimal del af brudlinie.  $\eta > 0$

Dissipationen i brudlinieelementet fra figur 3.5 bliver, jævnfør (3.1.4)

$$w_I ds = \frac{1}{2} \delta b f^* (1 - \sin \alpha) \sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2} \quad (3.1.6)$$

Af figur 3.5 findes

$$\sin \alpha = - \frac{|\eta|}{\eta} \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2}}$$

Indføres betegnelsen

$$r' = \frac{dr}{d\theta}$$

og er  $d\theta > 0$ , kan (3.1.6) omskrives til:

$$w_I ds = \frac{1}{2} |\eta| b f^* r (\sqrt{r'^2 + (r')^2} + \frac{|\eta|}{\eta} r') d\theta$$

Den samlede dissipation i brudlinien bestemmes herefter ved integralet

$$W_I = \frac{1}{2} |\eta| b \int_{\theta_0}^{\theta_1} r (\sqrt{r^2 + (r')^2} + \frac{|\eta|}{\eta} r') d\theta \quad (3.1.7)$$

For givne endepunkter A og B, findes brudlinieforløbet ved at kræve funktionalen fra (3.1.7) stationær. Eulerligningen til dette variationsproblem kommer til at lyde:

$$r r'' - 3(r')^2 - 2r^2 = 0 \quad (3.1.8)$$

Vedrørende variationsproblemer henvises f.eks. til E. Hansen [73.1]. Den fuldstændige løsning til differentialligningen (3.1.8) er:

$$r = \left( \frac{c_1}{\sin(2(\theta - c_2))} \right)^{1/2}, \quad \frac{c_1}{\sin(2(\theta - c_2))} > 0 \quad (3.1.9)$$

I (3.1.9) betegner  $c_1$  og  $c_2$  to arbitrære konstanter, der skal fastlægges ved randbetingelserne. Bemærk, at Eulerligningen og dermed løsningen på denne er uafhængig af fortegnet af  $\eta$ .

Indføres et sædvanligt, retvinklet,  $(x, y)$ -koordinatsystem med origo i O og med x-aksen drejet vinklen  $c_2$  i forhold til polaksen, bliver

$$x = r \cos(\theta - c_2), \quad y = r \sin(\theta - c_2)$$

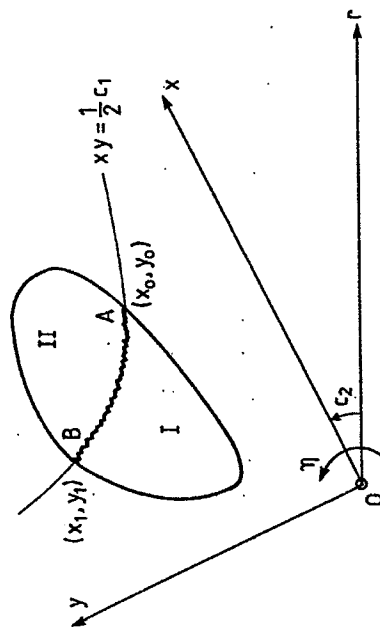
Ved indsættelse heraf i (3.1.9) fås beskrivelsen af brudlinien i  $(x, y)$ -systemet

$$xy = \frac{1}{2} c_1 \quad (3.1.10)$$

Af dette ses, at en kurve beskrevet ved (3.1.9) er en hyperbel, hvis asymptoter er to polstråler, der står vinkelret på hinanden. For en sådan brudlinieform er det opfyldt, at alle polstråler, der

krydser brudlinien, peger ind i del II, hvis det kræves, at O og skivedel I ligger på samme side af den rette linie gennem punkterne A og B. Dette krav udgør ingen principiel indskrænkning, da det frit kan vælges hvilken skivedel, der betragtes som den ubevægelige. Kravet  $d\theta > 0$  bliver i (3.1.7) med den hyperbelformede brudlinie overalt opfyldt, hvis  $\theta_0 < \theta_1$ .

I  $(x, y)$ -koordinatsystemet tillægges punkt A koordinaterne  $(x_0, y_0)$  og punkt B koordinaterne  $(x_1, y_1)$ . Se figur 3.6.



Figur 3.6: Introduktion af  $(x, y)$ -koordinatsystem.

Det kan vælges, at kræve  $c_1 > 0$ , thi erstattes  $c_1$  med  $-c_1$  i (3.1.9), ændres løsningen ikke, hvis  $c_2$  samtidig øges med vinklen  $\frac{\pi}{2}$ .

Af (3.1.7) fås

$$W_I = \frac{1}{2} |\eta| b \int_{\theta_0}^{\theta_1} r \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta + \frac{|\eta|}{\eta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r r' d\theta$$

Indsættes (3.1.9) heri, findes

$$W_I = \frac{1}{2} |\eta| b \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{c_1}{\sin^2(2(\theta - c_2))} d\theta + \frac{|\eta|}{\eta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r r' d\theta$$

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_C^* \left\{ -\frac{1}{2} c_1 \left[ \cot\{2(\theta - c_2)\} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} + \frac{|\eta|}{\eta} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x_0}^{x_1} \right\}$$

$$w_I = \frac{1}{4} |\eta| b f_C^* \left\{ -\frac{1}{2} c_1 \left[ \frac{\cot^2(\theta - c_2) - 1}{\cot(\theta - c_2)} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} + \frac{|\eta|}{\eta} [x^2]_{x_0}^{x_1} \right\} \quad (3.1.11)$$

Af figur 3.6 ses, at

$$x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad x_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\cot(\theta_0 - c_2) = \frac{x_0}{y_0}, \quad \cot(\theta_1 - c_2) = \frac{x_1}{y_1}$$

Dette giver ved indsættelse i (3.1.11):

$$w_I = \frac{1}{4} |\eta| b f_C^* \left\{ -\frac{1}{2} c_1 \left( \frac{x_1^2 - y_1^2}{x_1 y_1} - \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0 y_0} \right) + \frac{|\eta|}{\eta} (x_1^2 + y_1^2 - x_0^2 - y_0^2) \right\}$$

Da brudlinien i  $(x, y)$ -systemet er bestemt ved (3.1.10), er

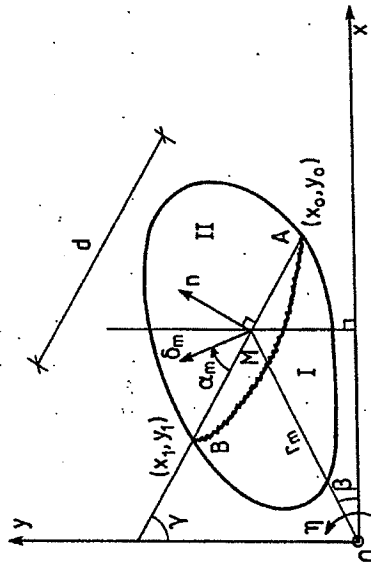
$$x_0 y_0 = x_1 y_1 = \frac{1}{2} c_1$$

og derfor kan udtrykket for dissipationen reduceres til

$$w_I = \frac{1}{4} |\eta| b f_C^* \{ y_1^2 - y_0^2 + x_0^2 - x_1^2 + \frac{|\eta|}{\eta} (y_1^2 - y_0^2 - x_0^2 + x_1^2) \} \quad (3.1.12)$$

I almindelighed vil  $(x, y)$ -systemet ikke kunne bestemmes umiddelbart, og udtrykket (3.1.12) er i så fald ubekendt. Det søges derfor at gøre udtrykket for dissipationen uafhængigt af koordinatbeskrivelsen, og der indføres hertil nogle globale parametre

som fremgår af figur 3.7.



Figur 3.7: Introduktion af globale parametre,  $\eta > 0$ .

Størrelsen  $d$  betegner længden af det rette linestykke  $AB$ , altså

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

På figur 3.7 betegner  $M$  midtpunktet af linestykket  $AB$ , og som vist betegner  $r_m$  længden af linestykket  $OM$ :

$$r_m = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2}$$

Da brudlinien følger hyperbelen (3.1.10) findes, at

$$r_m d = \frac{1}{2} (y_1^2 - y_0^2 + x_0^2 - x_1^2)$$

Derved kan (3.1.12) omskrives til:

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_C^* x_m d \left\{ 1 + \frac{|\eta|}{\eta} \frac{\frac{1}{2}(y_1 + y_0)(y_1 - y_0) - \frac{1}{2}(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_m d} \right\}$$

Indføres vinklerne  $\beta$  og  $\gamma$  fra figur 3.7, fås videre

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_C^* x_m d \{ 1 + \frac{|\eta|}{\eta} \sin(\beta - \gamma) \}$$

Vinklen  $\alpha_m$  fra figur 3.7 indføres ved

$$\alpha_m = \gamma - \beta \quad \text{for} \quad \eta > 0$$

$$\alpha_m = \beta - \gamma \quad \text{for} \quad \eta < 0$$

og betegnes flytningen af punkt M ved

$$\delta_m = x_m |\eta|$$

kan den samlede dissipation i en hyperbelformet brudlinie bestemmes af

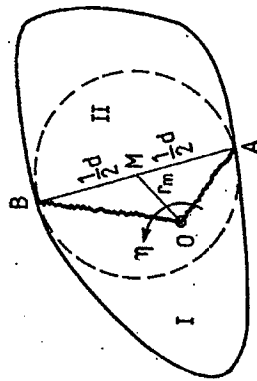
$$w_I = \frac{1}{2} \delta_m b d f_C^* (1 - \sin \alpha_m) \quad (3.1.13)$$

Betingelsen for, at en hyperbel af formen (3.1.10) kan bringes til at gå igennem punkterne A og B er, at O ligger udenfor cirklen udspændt af diameteren AB. Det vil sige, at (3.1.13) kun kan benyttes, såfremt

$$x_m > \frac{1}{2} d \quad (3.1.14)$$

Dersom (3.1.14) ikke er opfyldt, udgøres brudlinieforløbet af de to polstråler, der går gennem henholdsvis A og B, se figur 3.8. Der vil så være rent træk i den ene af disse polstråler og rent tryk i den anden.

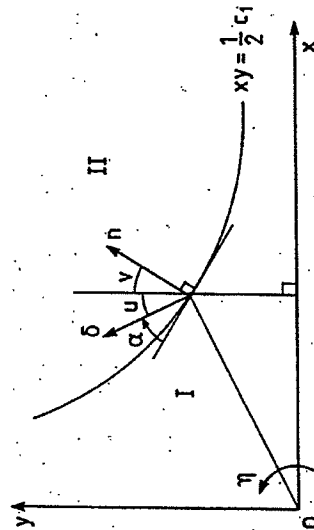
Det bør i øvrigt bemærkes, at når (3.1.14) er opfyldt, angiver (3.1.13) også det korrekte udtryk for dissipationen, selv om O



Figur 3.8: Brudlinieforløb ved  $r_m \leq \frac{1}{2} d$ .

ligger på den rette linie gennem A og B, i hvilket tilfælde brudlinien ikke udgøres af en hyperbel, men af en del af en polstråle.

Langs en hyperbelformet brudlinie kan spændingstilstanden på simpel vis bestemmes ved hjælp af  $(x, y)$ -koordinatsystemet, se figur 3.9.



Figur 3.9: Hjelpeparametre til bestemmelse af spændingstilstanden langs hyperbelformet brudlinie.



Figur 3.9 viser et eksempel med  $\eta > 0$ . Bestemmes vinklerne  $u$  og  $v$ , viser disse sig overalt at blive lige store, således at vinkelhalveringslinjen mellem den relative bevægelsesvektor og brudliniens normal overalt er parallel med y-aksen. Da vinklen  $\alpha$  langs hele hyperblen ligger i det åbne interval  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , udgøres spændingstilstanden langs den hyperbelformede brudlinje af et énakset tryk af størrelsen  $f_c^*$  rettet parallelt med x-aksen, eftersom første hovedspænding er rettet efter den nævnte vinkelhalveringslinje, se afsnit 3.1.1.

Tilsvarende bliver spændingstilstanden for  $\eta < 0$  et énakset tryk af størrelsen  $f_c^*$ , men nu rettet parallelt med y-aksen.

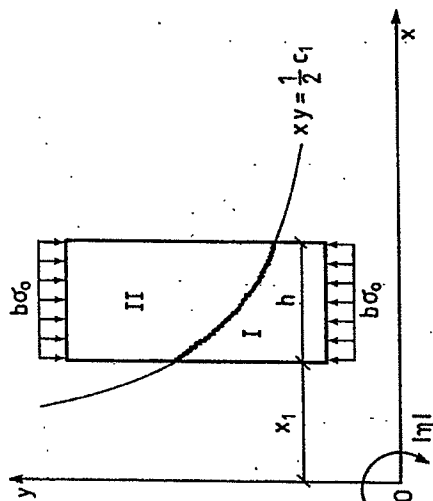
Betragtes figur 3.7 på tilsvarende måde, findes at også vinklerne  $\beta$  og  $(\frac{\pi}{2} - \gamma)$  er lige store, således at det også, når det er de globale parametre  $d$ ,  $x_m$  og  $\alpha_m$ , der foreligger, er muligt at bestemme retningen af det énaksede tryk langs brudlinjen. I så fald findes første hovedspændingsakse som vinkelhalveringslinjen mellem den relative bevægelse,  $\delta_m$ , og normalen til linien AB afsat i punkt M og rettet ind i del II.

I [78.2] har P. Müller betragtet et område i en betonskive, hvor spændingstilstanden er homogen og bestående af et énakset tryk af størrelsen  $f_c^*$ . Ved at antage, at der dannes en brudlinje gennem et sådant område ved en relativ stiftlegemebevægelse i form af en rotation om et punkt O i planen, har Müller ved at kræve, at første hovedspændingsakse overalt halverer vinklen mellem den relative bevægelsesvektor og brudliniens normal, netop fundet samme hyperbelformede brudlinjeforløb som bestemt ovenfor.

### 3.1.3 Eksempel

For at anskueliggøre resultaterne fra afsnit 3.1.2 gennemgås her en øvreverdiberegning af en rektangulær, uarmeret betonskive påvirket af et énakset tryk,  $\sigma_0$ , rettet parallelt med de to af skivens rande, se figur 3.10.

Da det vides, at spændingstilstanden i skiven udgøres af et lodret, énakset tryk, er det som følge af det sidst i afsnit 3.1.2 udledte naturligt at benytte det på figuren indlagte  $(x, y)$ -koo-



Figur 3.10: Uarmeret betonskive med énakset tryk.

dinatsystem, der har origo i omdrejningscentret, O, for den relative bevægelse af del II i forhold til del I, og som har akserne beliggende parallelt med skivens rande.

I det valgte  $(x, y)$ -system beskrives den dannede brudlinje ved

$$xy = \frac{1}{2} c_1, \quad c_1 > 0 \quad (3.1.15)$$

Dissipationen findes af (3.1.12) med  $\eta < 0$ , og da findes uafhængigt af  $c_1$ :

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_c^* (2 x_1 h + h^2), \quad x_1 > 0$$

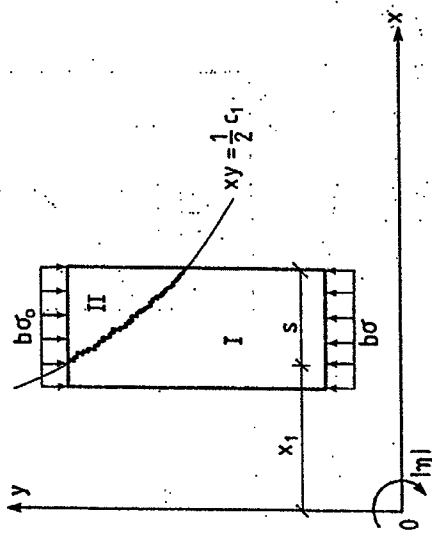
Det ydre arbejde bliver

$$w_E = \frac{1}{2} |\eta| b \sigma_0 (2 x_1 h + h^2), \quad x_1 \geq 0$$

Af arbejdsaligningen fås da øvreverdiløsningen for ethvert  $x_1 > 0$ :

$$\sigma_0 = f_c^* \quad (3.1.16)$$

Ovenstående beregning kan kun anvendes, dersom brudlinjen skærer begge skivens lodrette sider. Dette er dog ikke et nødvendigt krav for at nå til løsningen (3.1.16), se figur 3.11.



Figur 3.11.

Brudlinjen skærer nu en af skivens vandrette sider, og når brudlinjen atter beskrives på formen (3.1.15), fås nu dissipationen

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_O^* (2x_1 s + s^2) \quad , \quad x_1 > 0 \quad , \quad s > 0$$

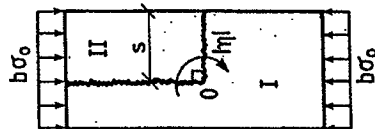
medens det ydre arbejde bliver

$$w_E = \frac{1}{2} |\eta| b \sigma_O (2x_1 s + s^2) \quad , \quad x_1 \geq 0 \quad , \quad s > 0$$

og arbejdsligningen fører atter til bæreevnen (3.1.16). Den sidste mekanisme kan også anvendes, når O ligger mellem skivens to lodrette begrænsningslinier. Af symmetri Grunde sluttes derfor, at løsningen (3.1.16) kan findes for enhver placering af O og herudover for enhver brudlinje af formen (3.1.15), der skærer gennem skiven.

Også brudlinier i form af polstråler kan komme i anvendelse ved den betragtede skive, se eksemplet på figur 3.12, hvor O lig-

ligger indenfor skivens rand.



Figur 3.12.

Ved mekanismen fra figur 3.12 udgøres brudlinjeforløbet af to polstråler, hvoraf den ene er lodret, og den anden er vandret. I den lodrette del af brudlinjen er der rent træk, medens der er rent tryk i den vandrette del. Dissipationen bliver

$$w_I = \frac{1}{2} |\eta| b f_O^* s^2 \quad , \quad s > 0$$

Og det ydre arbejde er

$$w_E = \frac{1}{2} |\eta| b \sigma_O s^2 \quad , \quad s > 0$$

Ved brug af arbejdsligningen findes da atter bæreevnen (3.1.16).

3.2. Brudlinjeforløb i skive af Coulombmateriale med vilkårlig trækstyrke

Brug af brudbetingelsen fra figur 2.2, og reference til figur 3.2 bestemmes den lokale dissipation i en brudlinje gennem en skive af et Coulombmateriale med vilkårligt reduceret trækstyrke til:

$$w_1 = \frac{1}{2} \delta b f_c^* (\lambda - \mu \sin \alpha) \quad (3.2.1)$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \delta b f_c^* (1 - \sin \alpha) \quad (3.2.2)$$

Konstanterne  $\mu$  og  $\lambda$  er defineret ved

$$\lambda = 1 - \rho(k-1) \quad , \quad \mu = 1 - \rho(k+1)$$

Svarende til behandlingen i afsnit 3.1.2 af brudlinier i skiver af et Coulombmateriale helt uden trækstyrke, indføres et polært  $(r, \theta)$ -koordinatsystem, som det på figur 3.4 viste, og hvor brudlinien ikke udgøres af en polstråle, anvendes igen beskrivelsen (3.1.5) af brudlinien. Som i afsnit 3.1.2 bestemmes dissipationen i brudlinien så ved et integral af formen

$$w_I = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{w_1}{\delta \theta} d\theta \quad (3.2.3)$$

I (3.2.3) indsættes (3.2.1), når  $\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \varphi$ , medens (3.2.2) indsættes, når  $\varphi \geq \alpha \geq -\frac{\pi}{2}$ .

Kræves funktionalen (3.2.3) stationær, skal  $r$  opfylde Eulerligningen. Denne ligning bliver singulær, når  $\alpha = \varphi$ , men kommer ellers i alle tilfælde til at lyde som (3.1.8), der har løsninger af formen (3.1.9). Derved bliver

$$r = \sqrt{\frac{c_1^2}{\sin(2(\theta - c_2))}} \cdot \frac{c_1^2}{\sin(2(\theta - c_2))} > 0, \quad \frac{\pi}{2} > \alpha > \varphi \quad (3.2.4)$$

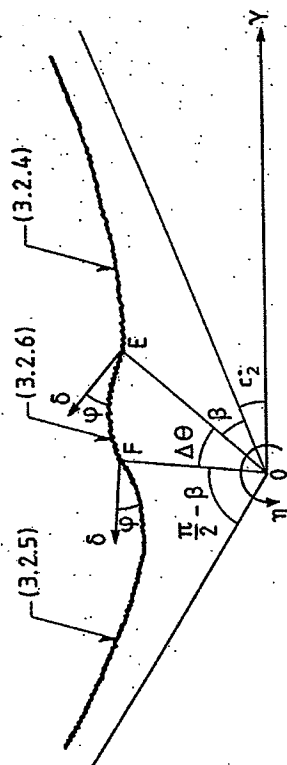
$$r = \sqrt{\frac{c_1^2}{\sin(2(\theta - c_2))}} \cdot \frac{c_1^2}{\sin(2(\theta - c_2))} > 0, \quad \varphi > \alpha > -\frac{\pi}{2} \quad (3.2.5)$$

Disse udtryk beskriver fortsat hyperbler af formen (3.1.10), og langs sådanne hyperbler sker det aldrig, at  $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$ .

De to hyperbler, (3.2.4) og (3.2.5), mødes ikke i et punkt svarende til  $\alpha = \varphi$ , men forbindes af en logaritmisk spiral:

$$r = q e^{-\frac{|\eta|}{\theta} \theta \operatorname{tg} \varphi} \quad (3.2.6)$$

hvor  $q$  er en konstant. Se skitsen af det samlede brudlinieforløb på figur 3.13.



Figur 3.13: Brudlinieforløb ved  $\eta > 0$ .

Længden, givet ved vinklen  $\Delta\theta$ , af den logaritmiske spiral (3.2.6) mellem de to hyperbler fastlægges ved brug af Kötters ligninger, se også M.P. Nielsen et al. [77.1] p. 641 ff. For  $\eta > 0$  følger brudlinien en såkaldt  $\beta$ -linie, og Kötters ligning langs denne kommer til at lyde

$$\partial r = 2r \operatorname{tg} \varphi \quad \partial \theta = 0 \quad (3.2.7)$$

idet der ikke regnes med volumenkræfter. I (3.2.7) betegner  $r$  forskydningsspændingen vinkelret på brudlinien.

Af (3.2.7) findes så for  $\eta > 0$ :

$$\Delta\theta = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \ln \frac{\tau(F)}{\tau(E)} \quad (3.2.8)$$

I (3.2.8) betegner  $\tau(E)$  og  $\tau(F)$  størrelsen af  $\tau$  i punkterne E og F. Disse forskydningsspændinger kan bestemmes, da spændingstilstanden langs hver af de to hyperbelformede dele af brudlinien

er kendt, idet hovedspændingsretningerne analogt til det i afsnit 3.1.2 fundne er parallelle med den respektive hyperbels asymptoter, og størrelsen af hovedspændingerne er fastlagt af brudbetingelsen med den associerede flydelov.

Der indføres et sædvanligt, retvinklet  $(x', y')$ -koordinatsystem med origo i 0 og med  $x'$ -aksen drejet vinklen  $c_2'$  i forhold til pol-aksen, så hyperblen fra (3.2.4) i dette system beskrives ved

$$x' y' = \frac{1}{2} c_1$$

Tilsvarende indføres et  $(x, y)$ -system, hvor hyperblen (3.2.5) beskrives ved

$$x y = \frac{1}{2} c_1$$

På figur 3.14 er de to hyperbler optegnet i henholdsvis  $(x', y')$ -systemet og  $(x, y)$ -systemet med angivelse af spændingstilstanden langs den respektive hyperbel ved  $\eta > 0$ .

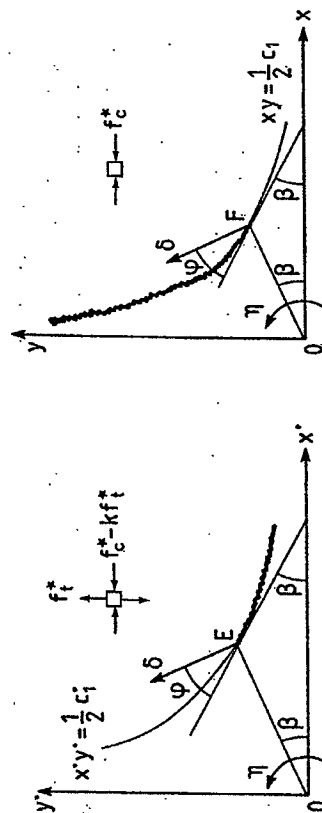


Fig. 3.14: Spændinger langs hyperbelformede brudlinier.

Forskydningsspændingerne  $\tau(E)$  og  $\tau(F)$  kan med vinklen  $\beta$  fra

figur 3.14 bestemmes af transformationsformlen:

$$\tau(E) = -\frac{1}{2}(f_c^* - f_c^*(k-1)) \sin 2\beta$$

$$\tau(F) = -\frac{1}{2} f_c^* \sin 2\beta$$

For begge hyperbler bliver

$$\beta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$$

så det fås, at

$$\tau(E) = -\frac{1}{2}(f_c^* - f_c^*(k-1)) \cos \varphi$$

$$\tau(F) = \frac{1}{2} f_c^* \cos \varphi$$

Herved giver (3.2.8):

$$\Delta\theta = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \ln \frac{f_c^*}{f_c^* - f_c^*(k-1)}$$

hvilket kan omskrives til

$$\Delta\theta = \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \lambda \quad (3.2.9)$$

Af (3.2.6) findes

$$\frac{\tau(F)}{\tau(E)} = e^{-\Delta\theta \operatorname{tg} \varphi}$$

som med (3.2.9) leder til

$$\frac{\tau(F)}{\tau(E)} = \sqrt{\lambda}$$

Dette betyder videre, at

$$c_1 = \lambda c_1' \quad (3.2.10)$$

Desuden er

$$c_2 = c_2' + \Delta\theta, \quad \eta > 0 \quad (3.2.11)$$

og vinklen  $\beta$  kan bestemmes ved

$$\cot \beta = \sqrt{k} \quad (3.2.12)$$

Endelig kan konstanten  $q$  fra (3.2.6) så bestemmes ved sammenstilling af (3.2.4) og (3.2.6) i punktet E.

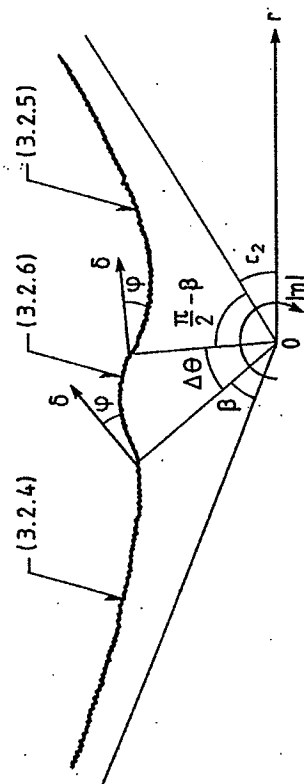
Alt i alt indses, at kendes de to konstanter  $c_1$  og  $c_2$ , kan hele brudlinieforløbet fastlægges. Samtidig er der netop to randbetingelser ved brudlinieproblemet, se figur 3.4, nemlig at brudlinien skal gå gennem punkterne A og B, som i det polære koordinatsystem har koordinaterne  $(\theta_0, r_0)$  og  $(\theta_1, r_1)$ ,  $\theta_1 > \theta_0$ . Dette vil således fastlægge konstanterne  $c_1$  og  $c_2$  éntydigt, så hele brudlinieforløbet er altså éntydigt bestemt ud fra de givne punkter O, A og B.

Er  $\eta < 0$  ændres brudlinieforløbet fra det på figur 3.13 viste til det på figur 3.15 angivne. I så fald følger brudlinien langs den logaritmiske spiral en  $\alpha$ -linie, og langs denne lyder Kötters ligning analogt til (3.2.7):

$$\partial r + 2r \operatorname{tg} \varphi \partial \theta = 0 \quad (3.2.13)$$

I så fald findes atter formierne (3.2.9), (3.2.10) og (3.2.12), medens (3.2.11) ændres til

$$c_2 = c_1^2 - \Delta \theta \quad (3.2.14)$$



Figur 3.15: Brudlinieforløb ved  $\eta < 0$ .

Brudlinieforløbene som skitserede på figurerne 3.13 og 3.15 er kun mulige, såfremt:

$$\theta_1 - \theta_0 < \frac{\pi}{2} + \Delta \theta \quad (3.2.15)$$

Er (3.2.15) ikke opfyldt, udgøres brudlinien af to polstråler svarende til det på figur 3.8 angivne.

Et enkelt generelt udtryk for den samlede dissipation ved brudlinieforløbene fra figurerne 3.13 og 3.15 kan ikke angives for vilkårlige placeringer af punkterne A og B langs brudlinien. Det skal dog nævnes, at hvis A og B begge ligger på hyperblen (3.2.5), bestemmes dissipationen ved (3.1.13), medens dissipationen, når A og B ligger på hyperblen (3.2.4), bliver:

$$w_I = \frac{1}{2} \delta_m b d f_C^* (\lambda - \mu \sin \alpha_m) \quad (3.2.16)$$

hvor betegnelserne fra figur 3.7 er anvendt.

Ligger A og B begge på den logaritmiske spiral (3.2.6), bliver dissipationen:

$$w_I = \frac{1}{2} \eta b f_C^* \frac{r_0^2 - r_1^2}{k - 1} \quad (3.2.17)$$

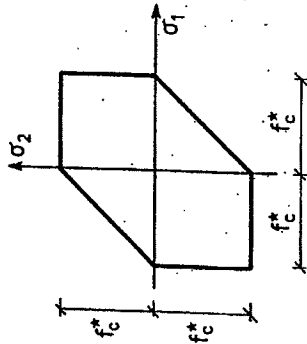
hvor  $\eta$  fortsat regnes med fortegn, og det er indrømmet, at det om punkterne A og B med koordinaterne  $(r_0, \theta_0)$  og  $(r_1, \theta_1)$  er forudsat, at  $\theta_1 > \theta_0$ .

### 3.3 Brudlinier i skive af Tresca-materialer

Et Tresca-materiale kan betragtes som et Coulombmateriale med friktionsvinklen  $\varphi = 0$ . Ved plan spændingstilstand kan brudbetingelsen afbildes som vist på figur 3.16.

Brudlinier i skiver af Tresca-materialer kan behandles ved i afsnit 3.2 at sætte  $k = 1$  og  $\rho = 1$ . Herved bliver konstanterne  $\lambda = \mu = 1$ . I enkelte af formlerne fra afsnit 3.2 er det ikke muligt, at indsatte  $k = 1$  direkte. I så fald findes resultatet gennem grænseovergangen

k → 1.



Figur 3.16: Flydebetingelse for Tresca-materiale.

Brudlinien udgøres fortsat, når (3.2.15) er opfyldt, af de to hyperbler, (3.2.4) og (3.2.5), samt den logaritmiske spiral (3.2.6), der for  $\varphi = 0$  udarter til en cirkel. Af formlerne (3.2.9) - (3.2.12) og (3.2.14) fås for Tresca-materialet:

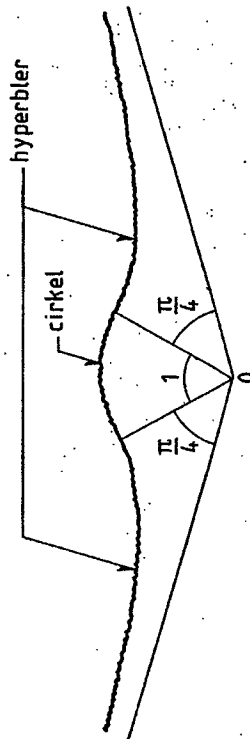
$$\Delta\theta = 1 \quad (3.3.1)$$

$$c_1 = c_1^* \quad (3.3.2)$$

$$c_2 = c_2^* + \frac{|\eta|}{\eta} \Delta\theta \quad (3.3.3)$$

$$\cot \beta = 1 \quad (3.3.4)$$

Det herved fastlagte brudlinieforløb er skitseret på 3.17.



Figur 3.17: Brudlinieforløb i skive af Tresca-materiale.

Er betingelsen (3.2.15) ikke opfyldt med  $\Delta\theta$  givet ved (3.3.1), udgøres brudlinieforløbet af to polstråler som angivet på figur 3.8.

### 3.4 Brudlinier i skiver af v. Mises-materialer

Også brudlinier i skiver af v. Mises-materialer kan behandles ved principperne fra afsnit 3.1. Beskrives brudlinien atter i det polære koordinatsystem fra figur 3.4, findes ved at kræve den samlede dissipation i brudlinien stationær, at brudlinien, når O, A og B ikke ligger på samme rette linie, bestemmes ved

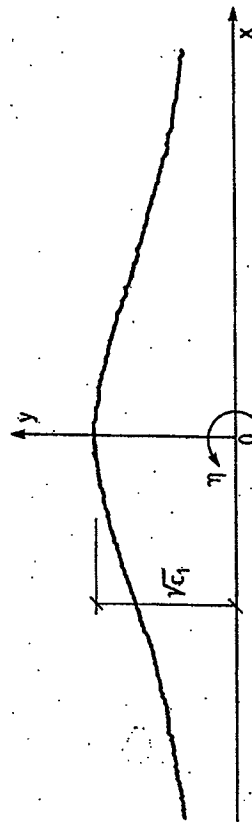
$$r = \sqrt{\frac{c_1}{\sin(\theta - c_2)}}, \quad \frac{c_1}{\sin(\theta - c_2)} > 0 \quad (3.4.1)$$

Indføres igen et sædvanligt, retvinklet  $(x, y)$ -koordinatsystem med origo i O og med x-aksen drejet vinklen  $c_2$  i forhold til polaksen, kan (3.4.1) omskrives til

$$y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + c_1^2 - \frac{x^2}{2}} \quad (3.4.2)$$

Det fundne brudlinieforløb er skitseret på figur 3.18.

Når punkterne O, A og B ligger på samme rette linie, udgøres brudlinien af en del af denne linie.

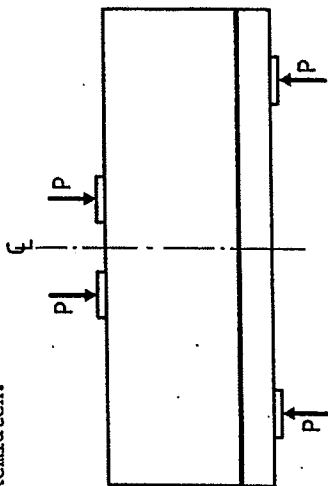


Figur 3.18: Brudlinieforløb i skive af v. Mises-materiale.

#### 4. SKIVER/BJÆLKER UDEN FØRKYDNINGSSARMERING

##### 4.1 Koncentreret last

Der betragtes en simpelt understøttet skive, som vist på figur 4.1. Skiven tånes angrebet af to enkeltkræfter placeret symmetrisk om bjælkemidten.



Figur 4.1: Skive med koncentreret last.

Længdearmeringen idealiseres ved en stringer beliggende i armerings tyngdepunktsakse.

Det beskrevne tilfælde behandles i afsnit 4.1.1 og 4.1.2 ganske nøje for skiver med så stærk længdearmering, at flydning heri ikke kommer på tale.

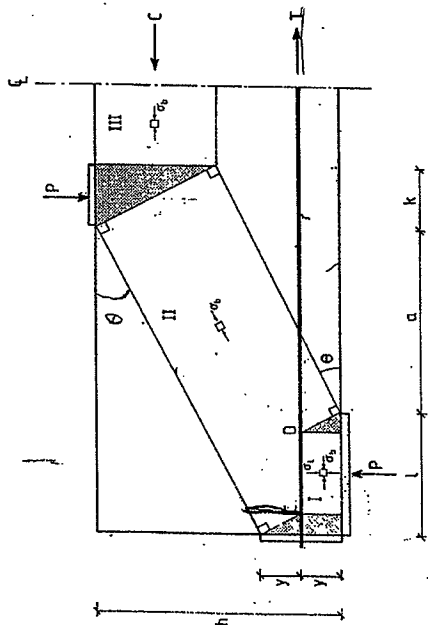
Betydningen af længdearmeringens styrke analyseres i afsnit 4.1.3.

##### 4.1.1 Nedreværdiløsning

Længdearmeringen tånes fastgjort til en forankringsplade bag understøtningen, og skiven deles så op i en række områder med homogen spændingstilstand som vist på figur 4.2.

I områderne II og III antages spændingstilstanden i betonen udgjort af et énskæst tryk af størrelsen,  $\sigma_b$ , medens der i de på figuren skraverede områder regnes med toskæst hydrostatisk tryk af størrelsen,  $\sigma_b$ . Armeringskraften,  $T$ , overføres til betonen dels via forankringspladen bag understøtningen, dels ved friktion mellem beton og armering langs strækningen CD. Derved bestemmes spændingen,  $\sigma_s$ , i område I til

$$\sigma_l = \sigma_b \sin^2 \theta \leq \sigma_b$$



Figur 4.2: Opdeling af skive i områder med homogen spændingstilstand.

Den vandrette spænding i område I bliver  $\sigma_b$ .  
Den beskrevne spændingstilstand er statisk mulig, hvis

$$l \geq 2 y \operatorname{tg} \theta \quad (4.1.1)$$

Endvidere er spændingstilstanden sikker, dersom  $\sigma_b \leq f_c^*$ , og hvis armeringen er stærk nok til at optage den for ligevægten nødvendige trækraft, T, hvilket forudsættes indtil videre.

Af figur 4.2 ses, at

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h - 2y}{a + l} \quad (4.1.2)$$

Lasten, P, bestemmes af

$$P = 2 y b \operatorname{tg} \theta \sigma_b + b(l - 2 y \operatorname{tg} \theta) \sigma_l$$

Spændingen,  $\sigma_l$ , kan skrives

$$\sigma_l = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \sigma_b$$

så med brug af (4.1.2) fås

$$P = \frac{(2ya + hl)(h - 2y)}{(h - 2y)^2 + (a + l)^2} b \sigma_b \quad (4.1.3)$$

Den største bæreevne og dermed den bedste nedreværdi findes ved at sætte

$$\sigma_b = f_c^*$$

Gøres dette, og indføres den formelle forskydningsspænding  $\tau$ , ved

$$\tau = \frac{P}{bh}$$

så leder (4.1.3) til nedreværdien på dimensionsløs form:

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{(2ya + hl)(h - 2y)}{h(h - 2y)^2 + h(a + l)^2} \quad (4.1.4)$$

Betingelsen (4.1.1) for at nå til løsningen (4.1.4) giver ved brug af (4.1.2):

$$l \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 8y(h - 2y)} - a) \quad (4.1.5)$$

Størrelsen k bliver med den anvendte spændingsfordeling:

$$k = \frac{\tau}{f_c^*} h \quad (4.1.6)$$

Spændingsfordelingen fra figur 4.2 er ikke altid den optimale. Så-  
længde

$$y \leq \frac{1}{3} h \quad (4.1.7)$$

indtræffer dette, når kraften  $C = T$  svarende til løsningen (4.1.4) bliver så stor, at

$$C > b(h - y)f_c^* \quad (4.1.8)$$



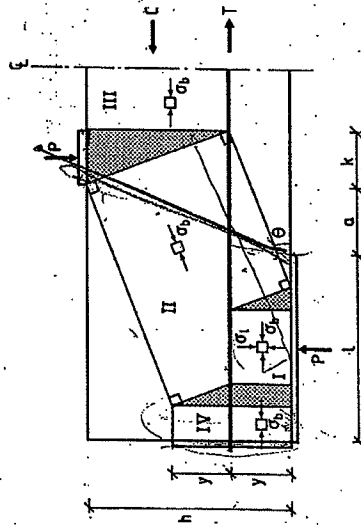
Kraften  $C$  svarende til (4.1.4) er

$$C = P \cot \theta$$

hvilket betyder, at (4.1.8) er opfyldt, når

$$l > \frac{h-2y}{2y} (\sqrt{a^2 + 4y(h-y)} + a) - a \quad (4.1.9)$$

I så fald ændres spændingsfordelingen fra figur 4.2 til det på figur 4.3 viste. Denne spændingsfordeling er i princippet ikke særlig forskellig fra den fra figur 4.2, blot udfyldes hele lejlevidden ikke, og der er tilføjet et nyt område, område IV, med vandret énakset tryk. Der regnes fortsat med toakset hydrostatisk tryk i de på figuren skrevne områder.



Figur 4.3.

Den bedste nedrevardi fås stadig, når

$$\sigma_b = f^*_c$$

Momentligevægt for den viste halvdel af skiven giver

$$b h \tau (a + \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} k) = \frac{1}{2} (h-y) C \quad (4.1.10)$$

Størrelsen  $k$  bestemmes stadig ved (4.1.6), og kraften  $C = T$  er nu:

$$C = b(h-y)f^*_c \quad (4.1.11)$$

så (4.1.10) er ensbetydende med, at

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{f^*_c} \right)^2 h^2 + (a + \frac{1}{2} l) \frac{\tau}{f^*_c} - \frac{1}{2} (h-y)^2 = 0$$

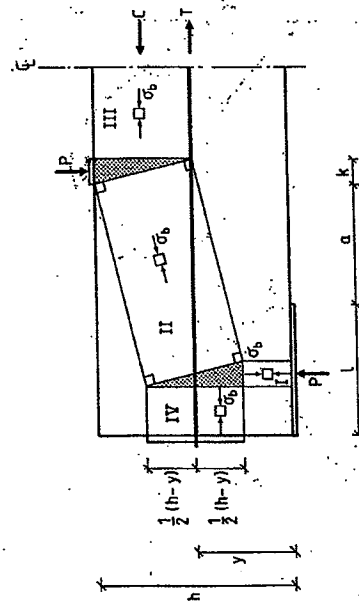
hvilket leder til barevnen

$$\frac{\tau}{f^*_c} = \frac{1}{2h} (\sqrt{(2a + l)^2 + 4(h-y)^2} - (2a + l)) \quad (4.1.12)$$

Når armeringen ligger meget højt, det vil sige, når

$$y > \frac{1}{3} h \quad (4.1.13)$$

bliver spændingsfordelingen fra figur 4.2 aldrig aktuel, jævnfør grænserne (4.1.5) og (4.1.9). Er lejlevidden så stor, at trykbrud over lejle undgås, vil spændingsfordelingen, når (4.1.13) er opfyldt, komme til at se ud som vist på figur 4.4.



Figur 4.4: Spændingsfordeling for  $y > \frac{1}{3} h$ .

Igen sættes

$$\sigma_b = f_c^*$$

og bæreevnen findes atter ved momentligningen (4.1.10), der fortsat fører til bæreevnen

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2h} (\sqrt{(2a + \ell)^2 + 4(h-y)^2} - (2a + \ell)) \quad (4.1.14)$$

For at undgå trykbrud over lejet, skal

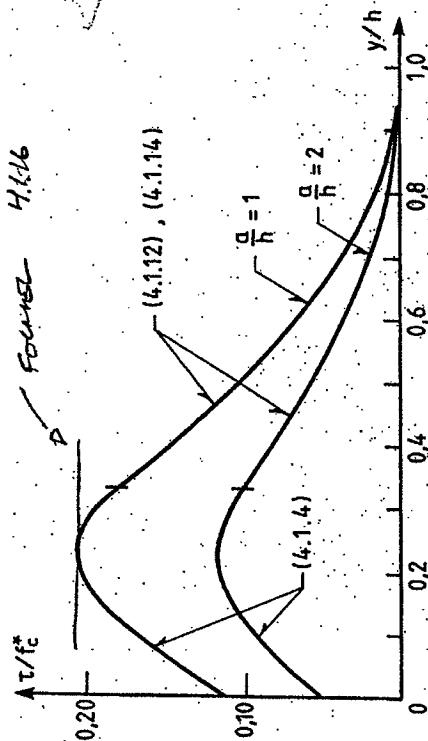
$$\ell \geq \frac{\tau}{f_c} h$$

hvilket, når (4.1.14) er aktuel, er ensbetydende med, at

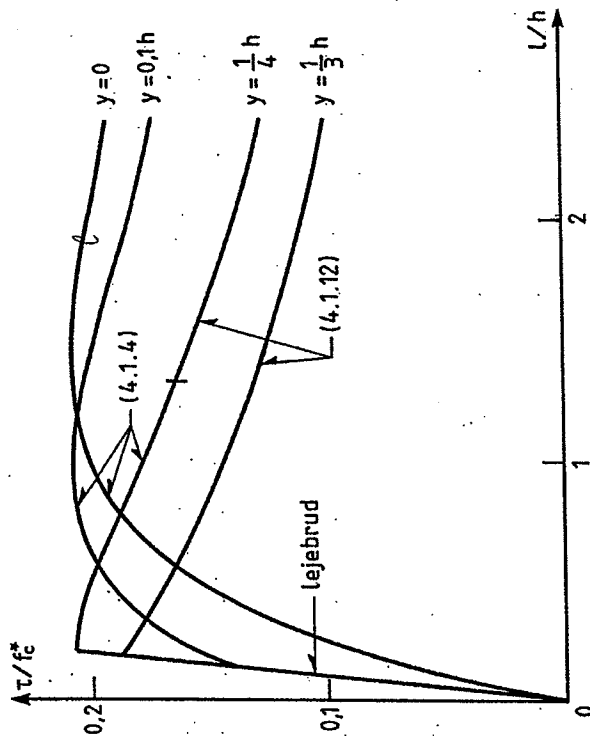
$$\ell \geq \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 2(h-y)^2} - a) \quad (4.1.15)$$

Når  $y = \frac{1}{3}h$ , bliver figur 4.3 og 4.4 identiske, idet de to områder benævnt I på hver af de figurer så forsvinder.

På figur 4.5 ses en afbildning af de fundne bæreevner som funktion af  $y$ , medens figur 4.6 illustrerer afhængigheden af  $\ell$ .



Figur 4.5: Bæreevne som funktion af  $y$  ved  $\ell = 0.3 h$ .



Figur 4.6: Bæreevne som funktion af  $\ell$  ved  $\frac{a}{h} = 1$ .

Af figur 4.5 ses, hvorledes den største bæreevne, der kan opnås for en given værdi af  $\ell$ , opnås for en tilsvarende værdi af  $y$ , hvor bæreevnen bestemmes ved (4.1.4). Denne optimale placering af armeringen findes ved i udtrykket (4.1.4) at kræve

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$y = y_0 = \frac{h^2 + a(a + \ell) - (a + \ell) \sqrt{a^2 + h^2}}{2h} \quad (4.1.16)$$

Indsættes dette i (4.1.4), fås den maksimalt opnåelige bæreevne:

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{a}{h} \right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad (4.1.17)$$

Dette gælder uafhængigt af den valgte lejevidde,  $\ell$ , dog må udtrykket (4.1.16) ikke lede til negative værdier af  $y$ , så det kræves, at

$$\lambda \leq \sqrt{a^2 + h^2} \quad (4.1.18)$$

For større lejevidder end givet ved (4.1.18) vil bæreevnen (4.1.17) aldrig kunne opnås.

Endvidere kræves for brug af (4.1.4), at (4.1.5) er opfyldt, hvilket, når  $y$  bestemmes af (4.1.16) er ensbetydende med, at

$$\lambda \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} - a) \quad (4.1.19)$$

Den mindste lejevidde, der på nogen måde kan føre til bæreevnen (4.1.17), er altså:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} - a) \quad (4.1.20)$$

og i så fald fås af (4.1.16), at

$$y_0 = \frac{1}{4}h \quad (4.1.21)$$

Ligger armeringen højere end svarende til (4.1.21), er det således heller ikke på nogen måde muligt at opnå bæreevnen (4.1.17), eftersom udtrykket (4.1.16) vokser med aftagende værdier af  $\lambda$ .

For de sammenhørende værdier af  $\lambda$  og  $y_0$  bestemt ved henholdsvis (4.1.20) og (4.1.21) forsvinder området benævnt I på figur 4.2. Løsningen er i det tilfælde kendt fra tidligere arbejder, se f.eks. D.C. Drucker [61.1] og M.P. Nielsen et al [78.1].

Spændingsfordelingen fra figur 4.2 er for  $y = 0$  studeret af M.P. Nielsen, [71.1]. Når armeringen således er placeret i skivens nedre rand, forsvinder de to områder over lejet, hvor der er hydrostatisk tryk. Det vil sige, at den lodrette spænding over hele lejet er

$$\sigma_\lambda = \sigma_b \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \sigma_b \quad (4.1.22)$$

Den samlede last bliver så:

$$P = b \lambda \sigma_b \sin^2 \theta$$

medens trækraften,  $T$ , i armeringen bliver

$$T = b \lambda \sigma_b \sin \theta \cos \theta$$

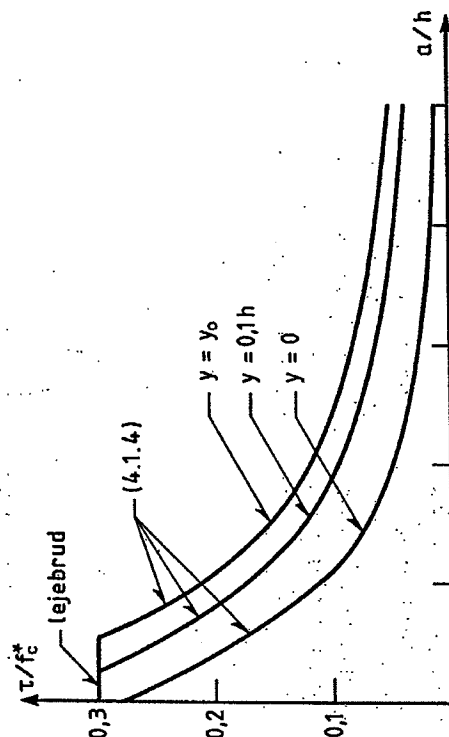
Derved fås

$$\cot \theta = \frac{T}{P}$$

og når det forlanges, at  $\sigma_b \leq f_c^*$ , ledes M.P. Nielsen af (4.1.22) til kravet

$$\sigma_\lambda = \frac{P}{b\lambda} \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{T}{P}\right)^2} f_c^* \quad (4.1.23)$$

Den maksimale bæreevne svarende til kravet (4.1.23) fås ved i (4.1.4) at sætte  $y = 0$ . Af figur 4.5 ses, hvorledes bæreevnen for en moderat lejevidde som  $\lambda = 0.3h$  kan forøges ved at hæve armeringen et stykke over skivens bund. Dette forhold er yderligere illustreret på figur 4.7, hvor bæreevnen bestemt ved (4.1.4) er afbildet som funktion af  $\frac{a}{h}$ , når  $\lambda = 0.3h$ , for  $y = 0$ ,  $y = 0.1h$  og for  $y = y_0$  bestemt ved (4.1.16).

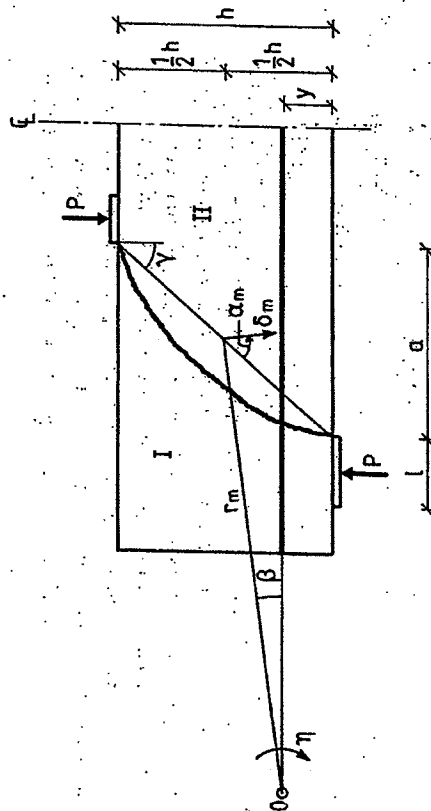


Figur 4.7: Bæreevne som funktion af  $\frac{a}{h}$  ved  $\lambda = 0.3h$ .

Af figuren ses, hvorledes bæreevnen svarende til  $y = 0.1h$  vokser i forhold til bæreevnen svarende til  $y = 0$  for voksende værdier af  $\frac{a}{h}$ . Heraf slutes, at (4.1.23) anvendt som et generelt krav ofte vil være for konservativt, fordi der altid vil findes et vist dæklag under armeringen.

#### 4.1.2 Øvre værdiløsning

I første omgang forudsættes, at lejevidden,  $\ell$ , er tilstrækkelig til, at trykbrud over lejet undgås. Derefter betragtes mekanismen fra figur 4.8.



Figur 4.8.

Ved bruddet tankes skivedelen benævnt I, og som ligger over understøtningen, at rotere om et punkt O i forhold til skivedelen benævnt II. Ved rotationen hæves understøtningen i forhold til skivens midterdel. Armeringen, der idealiseres som en stringer, regnes så stærk, at den ikke flyder, og omdrejningscentret, O, for den relative bevægelse må da ligge på armeringens langdeakse.

Ved bruddet dannes en hyperbelformet brudlinje fra understøtningen

til lastpladen. Dissipationen i denne brudlinje findes ved at betragte skivedel II som den bevægelige, og vinklen  $\eta$  fra figur 4.8 betegner således den relative rotation af del II.

Til brug ved indsættelse i (3.1.13) bestemmes størrelserne

$$\bar{d} = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\delta_m = \eta x_m = \frac{(\frac{1}{2}h - y)}{\sin \beta} \eta$$

$$\sin \alpha_m = \sin(\gamma + \beta) = \sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta$$

Herved findes dissipationen af (3.1.13) til

$$w_I = \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2}h - y)}{\sin \beta} \eta \sqrt{a^2 + h^2} (1 - \sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta) b f_c^*$$

Nu er

$$\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

så udtrykket for dissipationen kan reduceres til

$$w_I = \frac{1}{2} (h - 2y) (\sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - a \cot \beta - h) \eta b f_c^*$$

Det ydre arbejde bestemmes som reaktionens arbejde ved den relative bevægelse af del I, dvs.:

$$w_E = \{(\frac{1}{2}h - y) \cot \beta - \frac{1}{2}(a + \ell)\} \eta P$$

Af arbejdslikningen fås så bæreevnen:

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - a \cot \beta - h}{(h - 2y) \cot \beta - a - \ell} \quad (4.1.24)$$

Den mindste bæreevne og dermed den bedste øvre værdi findes ved at optimere (4.1.24) med hensyn til  $\cot \beta$ . Den herved fundne værdi af  $\cot \beta$  bliver

$$\cot \beta = \frac{a^3 + 2\lambda a^2 + (h^2 + \lambda^2 - 4y^2)a + 2\lambda h(h - 2y)}{(h - 4y)a^2 - 4\lambda ya + h(h - 2y)^2 - h\lambda^2} \quad (4.1.25)$$

Indføres som ved nedreværdiløsningen den formelle forskydnings-spænding:

$$\tau = \frac{P}{bh}$$

og indsættes (4.1.25) i (4.1.24), fås øvregrænsen

$$\frac{\tau}{\tau_C} = \frac{(2ya + h\lambda)(h - 2y)}{h(h - 2y)^2 + h(a + \lambda)^2} \quad (4.1.26)$$

For at undgå trykbrud over lejet, skal

$$\lambda \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 8y(h - 2y)} - a) \quad (4.1.27)$$

Endvidere gælder (4.1.24) kun så længe

$$\cot \beta \geq 0 \quad (4.1.28)$$

Betragtes i første omgang kun skiver, hvor

$$y \leq \frac{1}{3}h \quad (4.1.29)$$

ses, at tælleren i (4.1.25) altid er positiv, så kravet (4.1.28) er opfyldt, hvis

$$(h - 4y)a^2 - 4\lambda ya + h(h - 2y)^2 - h\lambda^2 \geq 0$$

hvilket er ensbetydende med, at

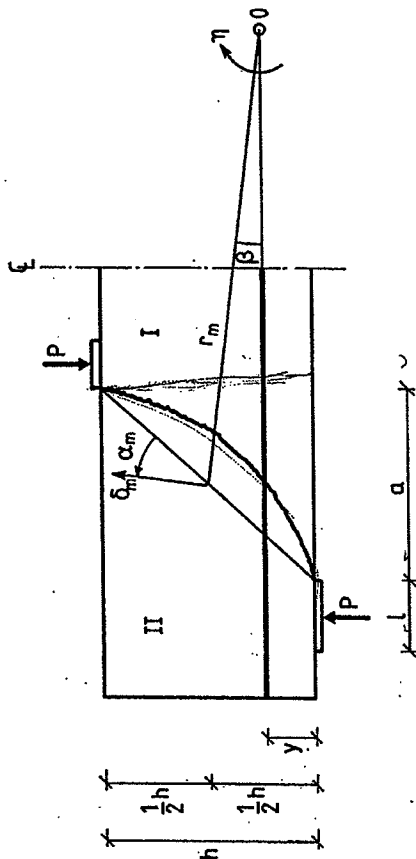
$$\lambda \leq \frac{h - 2y}{h} (\sqrt{a^2 + h^2} + a) - a \quad (4.1.30)$$

Når

$$\lambda = \frac{h - 2y}{h} (\sqrt{a^2 + h^2} + a) - a \quad (4.1.31)$$

rykker punkt O på figur 4.8 ud i det uendelige fjerne, og brudmekanismen bliver da et rent forskydningsbrud.

Når (4.1.30) ikke er opfyldt, ændres mekanismen fra figur 4.8 til det på figur 4.9 viste.



Figur 4.9.

Ved mekanismen fra figur 4.9 roterer skivedel II i forhold til del I om punkt O, således at understøtningen hæves i forhold til skivens midterdel. Svarende til (4.1.24) bliver bæreevneudtrykket nu

$$\frac{P}{b\tau_C} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - a \cot \beta + h}{(h - 2y) \cot \beta + a + \lambda} (h - 2y) \quad (4.1.32)$$

og den optimale værdi af  $\cot \beta$  bliver nu

$$\cot \beta = - \frac{a^3 + 2\lambda a^2 + (h^2 + \lambda^2 - 4y^2)a + 2\lambda h(h - 2y)}{(h - 4y)a^2 - 4\lambda ya + h(h - 2y)^2 - h\lambda^2} \quad (4.1.33)$$

Indsættes (4.1.33) i (4.1.32), fås atter bæreevnen (4.1.26).

Udtrykket (4.1.32) gælder dels kun for positive værdier af  $\cot \beta$  dels kun, så længe kravet (3.1.14) er opfyldt. Det sidste krav lyder i det aktuelle tilfælde

$$\frac{(h - y) \sin \beta}{2} > \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + h^2}$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$(h - 2y) \sqrt{1 + \cot^2 \beta} > \sqrt{a^2 + h^2}$$

Indsættes (4.1.33) heri, fås kravet

$$\lambda < \frac{h - 2y}{2y} (\sqrt{a^2 + 4y(h - y)} + a) - a \quad (4.1.34)$$

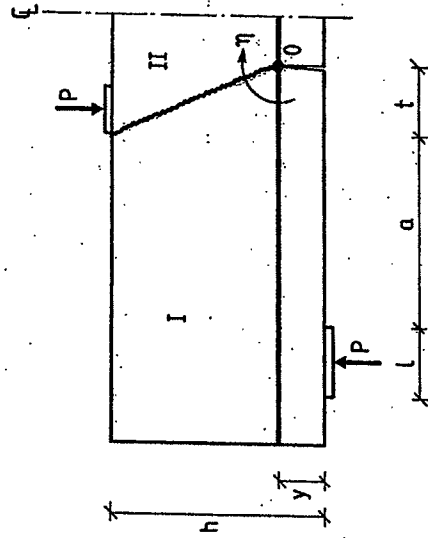
Bliver lejevædden større end dette, andres brudmekanismen fra figur 4.9 til den på figur 4.10 viste, hvor der dannes to brudlinier i form af polstråler; men i øvrigt er den nye mekanisme ganske analog til mekanismen fra figur 4.9.

Det indre arbejde bliver nu

$$W_I = \left( \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} (h - y)^2 \right) b \eta f_c^*$$

medens det ydre arbejde bliver

$$W_E = (a + t + \frac{1}{2} \lambda) \eta P$$



Figur 4.10.

Bæreevnen bestemt ved arbejds-ligningen bliver da

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{t^2 + (h - y)^2}{2a + 2t + \lambda} \quad (4.1.35)$$

Dette udtryk optimeres med hensyn til  $t$ , og den bedste værdi heraf bliver

$$t = \frac{1}{2} (\sqrt{(2a + \lambda)^2 + 4(h - y)^2} - (2a + \lambda))$$

Dette indsættes i (4.1.35), så øvre-værdien på dimensionsløs form bliver nu

$$\frac{P}{f_c^*} = \frac{1}{2h} (\sqrt{(2a + \lambda)^2 + 4(h - y)^2} - (2a + \lambda)) \quad (4.1.36)$$

Når armeringen ligger meget højt, det vil sige, når

$$y > \frac{1}{3} h \quad (4.1.37)$$

bliver mekanismerne fra figurerne 4.8 og 4.9 aldrig aktuelle. I så fald bliver brudmekanismen i alle tilfælde den på figur 4.10 viste, og bæreevnen bliver så altid bestemt ved (4.1.36), med mindre lejevædden er så lille, at trykbrud over lejet er bliver farligere. Dette betyder, at når (4.1.37) er opfyldt, bestemmes bæreevnen ved (4.1.36), så længe

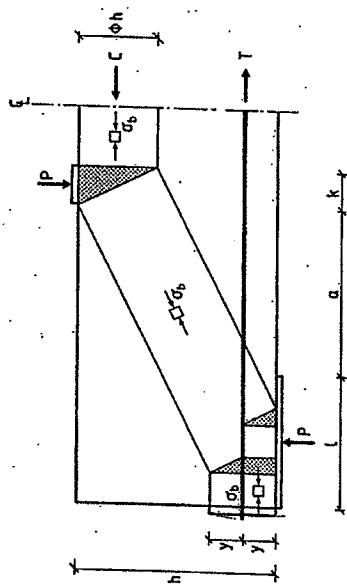
$$\lambda > \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 2(h - y)^2} - a) \quad (4.1.38)$$

Alt i alt indses, at hvis lastpladens længde er bestemt ved (4.1.6), er løsninger fra afsnit 4.1.1 sammenfaldende med de i dette afsnit fundne. De fundne løsninger er følgende eksakte.

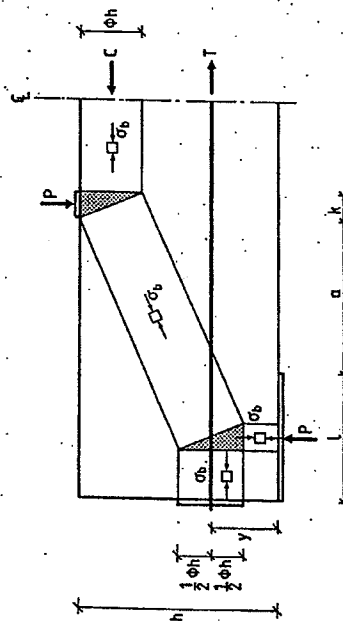
Det samlede løsningskompleks for skiveproblemet fra figur 4.1, når der ikke regnes med flydning i armeringen, er angivet i oversigtsform på figur 4.11.

Det bør bemærkes, at hvis (4.1.31) inverteres, fås netop (4.1.16), således at bæreevnen (4.1.17), der som nævnt er den maksimalt opnåelige, netop svarer til et rent forskydningsbrud.





Figur 4.12.



Figur 4.13.

$$\frac{T}{f_C} (a + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}k) = (h - y - \frac{1}{2}\phi h)\phi \quad (4.1.43)$$

Forudsættes  $k$  bestemt ved (4.1.6) fås så bæreevnen

$$\frac{T}{f_C} = \frac{1}{2h} \{ \sqrt{2a + l}^2 + 4\phi h(2h - \phi h - 2y) - (2a + l) \} \quad (4.1.44)$$

Når

$$y > (1 - \phi)h \quad (4.1.45)$$

er spændingsfordelingerne fra figurerne 4.12 og 4.13 ikke længere optimale, istedet kommer så fordelingen fra den relevante af figurerne 4.3 og 4.4 til anvendelse svarende til, at armeringen ikke længere udnyttes fuldt ud. Bæreevnen bestemmes i så fald af et af de identiske udtryk (4.1.12) og (4.1.14).

I alt ses, at bæreevnen ved små armeringsgrader findes som løsnin-gen fra afsnit 4.1.1, dog erstattet med (4.1.44) for et interval af  $y$  svarende til, at ingen af krævene (4.1.42) og (4.1.45) er opfyldt. Den herved fremkomne løsning er illustreret på figur 4.14 for et enkelt eksempel.

Løsningen (4.1.44) for små armeringsgrader er eksakt, da mekanismen fra figur 4.15 leder til den samme bæreevne bestemt som en øvrevar-di. Denne mekanisme er analog til den på figur 4.10 viste, rotati-onscentret,  $O$ , ligger nu blot over længdearmeringen. Det indre ar-bejde bliver

$$W_I = \{ \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t^2 + (h - y - s)\phi h \} \eta b f_C$$

medens det ydre arbejde er

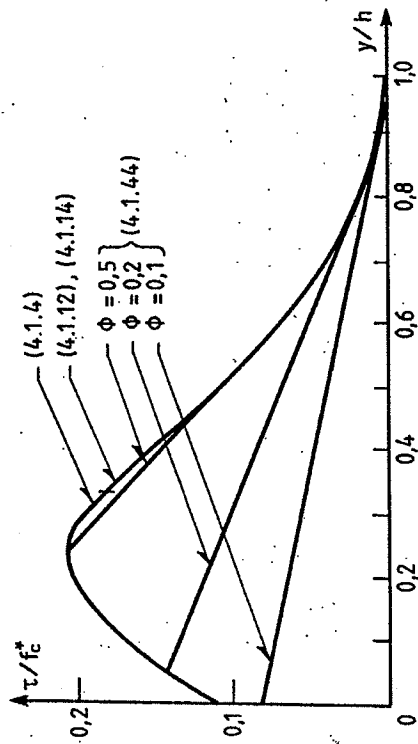
$$W_E = (a + t + \frac{1}{2}l)\eta P$$

Af arbejds ligningen findes da bæreevnen:

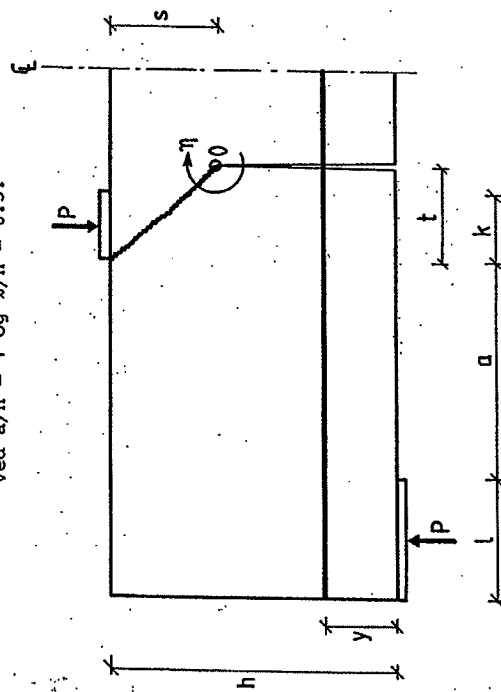
$$\frac{P}{bf_C} = \frac{s^2 + t^2 + 2(h - y - s)\phi h}{2a + 2t + l} \quad (4.1.46)$$

Optimeres (4.1.46) med hensyn til  $s$  og  $t$  fås:





Figur 4.14: Bæreevnen som funktion af  $y/h$  ved  $a/h = 1$  og  $l/h = 0.3$ .



Figur 4.15.

$$s = \phi h$$

$$t = \frac{1}{2} (\sqrt{(2a + l)^2 + 4\phi h(2h - \phi h - 2y)} - (2a + l))$$

så ved indsætning findes

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \frac{1}{2h} \{ \sqrt{(2a + l)^2 + 4\phi h(2h - \phi h - 2y)} - (2a + l) \} \quad (4.1.47)$$

som er identisk med (4.1.44).

Udtrykket (4.2.46) gælder ikke, hvis

$$h - y - s < 0$$

hvilket med den fundne værdi af  $s$  er ensbetydende med (4.1.45), så når dette udtryk er opfyldt, erstattes mekanismen fra figur 4.15 med den på figur 4.10 viste.

Endvidere bliver bæreevnen bestemt ved (4.1.47) større end den ved (4.1.4) fundne, såfremt (4.1.42) er opfyldt, og mekanismen fra figur 4.15 erstattes i så fald af den relevante af mekanismerne fra figurerne 4.8 og 4.9.

Det noteres, at den samlede løsning kun er eksakt, hvis  $k$  bestemmes af (4.1.6).

Den absolut største bæreevne, der kan opnås for en given armeringsgrad,  $\phi$ , og lejevidde,  $l$ , bestemmes for små armeringsgrader for den værdi af  $y$ , der svarer til lighedstegn i (4.1.41), det vil sige for

$$y = y_0 = \frac{2\phi h^2 + (a + l)a - (a + l)\sqrt{a^2 + 4\phi(1 - \phi)h^2}}{4\phi h} \quad (4.1.48)$$

Indsættes denne værdi af  $y$  i (4.1.4) eller (4.1.44), fås bæreevnen:

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \frac{1}{2h} (\sqrt{a^2 + 4\phi(1 - \phi)h^2} - a) \quad (4.1.49)$$

Dette er uafhængigt af den valgte lejevidde,  $l$ , dog må (4.1.48) ikke lede til negative værdier af  $y$ , altså kræves

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-\phi)} (\sqrt{a^2 + 4\phi(1-\phi)h^2} + a) - a \quad (4.1.50)$$

For større lejevædder kan bæreevnen (4.1.49) aldrig opnås, se f. eks. figur 4.14 for  $\phi = 0.1$ .

For at sikre mod trykbrud over lejjet kræves endvidere for brug af løsningen (4.1.49), at

$$\lambda \geq \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4\phi(1-\phi)h^2} - a) \quad (4.1.51)$$

Den mindste lejevædder, der kan føre til bæreevnen (4.1.49) er altså

$$\lambda = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4\phi(1-\phi)h^2} - a) \quad (4.1.52)$$

og indsættes dette i (4.1.48) findes den tilsvarende værdi af  $Y_0$ :

$$Y_0 = \frac{1}{2} \phi h \quad (4.1.53)$$

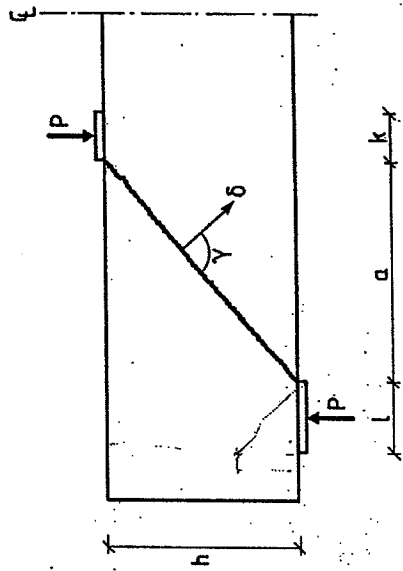
For  $\phi > \frac{1}{2}$  bliver  $Y_0$  bestemt ved (4.1.48) større end svarende til maksimum for (4.1.4). Skal maksimalbæreevnen derfor findes for så kraftigt armerede skiver, erstattes udtrykkene (4.1.48) - (4.1.53) med udtrykkene (4.1.16) - (4.1.21).

Det er værd at notere sig, at maksimalbæreevnen altid kan opnås, hvis lejevædder er afpasset, så der netop opstår trykbrud over lejjet, og  $Y$  derefter vælges, så der bliver toakset hydrostatisk tryk over lejjet. Det sidste svarer til, at armeringen lægges midt i den nedre trykzone bag lejjet.

Bæreevnen (4.1.49) for  $\phi \leq \frac{1}{2}$  findes som nævnt for den geometri, hvor mekanismerne fra figurerne 4.8 og 4.15 leder til samme bæreevne. I [78.1] er der vist en tredje mekanisme, der også leder til bæreevnen (4.1.49), se figur 4.16.

Ved den viste mekanisme dannes en ret brudlinje fra understøtning til lastplade ved, at skivens midterdel i forhold til delen over understøtningen translateres stykket  $\delta$  under vinklen  $\gamma$  med brudlinjen. Optimeres denne vinkel,  $\gamma$ , findes netop bæreevnen:

$$\frac{I}{I_C} = \frac{1}{2h} (\sqrt{a^2 + 4\phi(1-\phi)h^2} - a), \quad \phi \leq \frac{1}{2} \quad (4.1.54)$$



Figur 4.16.

$$\frac{I}{I_C} = \frac{1}{2h} (\sqrt{a^2 + h^2} - a), \quad \phi > \frac{1}{2} \quad (4.1.55)$$

Ved udtrykket (4.1.55) bliver den relative bevægelse lodret svarende til, at der ikke opstår flydning i armeringen.

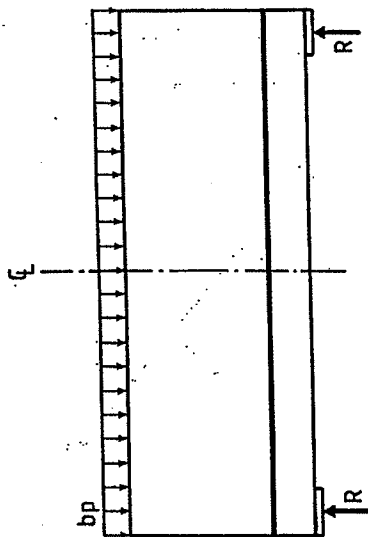
Mekanismen fra figur 4.16 leder til bæreevner, der er uafhængige af både  $\lambda$  og  $Y$ , men med reference til det tidligere gennemgåede her i kapitel 4.1 skal det indskræpes, at udtrykkene (4.1.54) og (4.1.55) tilsammen kun udgør den eksakte løsning under forudsætning af et ganske bestemt samspil mellem lejevædder og armeringens placering.

#### 4.2 Jævnt fordelt last

En simpelt understøttet skive regnes påvirket af en jævnt fordelt last, se figur 4.17.

Lasten består af en jævnt fordelt spænding,  $p$ , virkende over hele skivens bredde, b.

Til bestemmelse af bæreevnen for det viste lasttilfælde følger i afsnit 4.2.1 udledningen af en nedreværdiløsning.



Figur 4.17: Skive med jævnt fordelt last.

I afsnit 4.2.2 gennemgås en tilsvarende øvreverdiløsning for skiver med svag længdearmering.

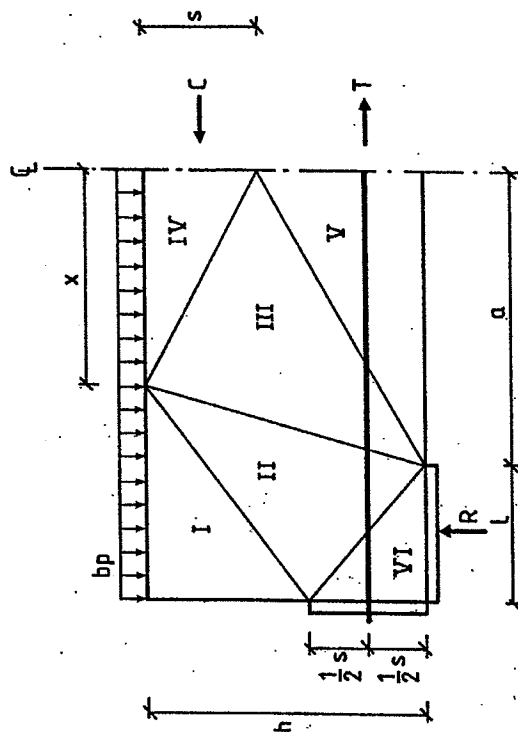
#### 4.2.1 Nedreværdiløsning

Skiven deles op i en række delområder som angivet på figur 4.18. Inden for hvert af disse områder regnes spændingstilstanden at være homogen, og det antages, at hele armeringskraften,  $T$ , overføres til betonen gennem en forankringsplade bag understøtningen. Område V regnes spændingsfrit, så kontinuetsbetingelserne kræver derfor, at spændingstilstanden i område III udgøres af et ånket tryk rettet parallelt med skillelinien mellem område III og IV. Dette ånksede tryk bliver rettet efter resultanten af spændingerne virkende på skillefladen mellem område III og IV, så det nævnte krav er ensbetydende med, at

$$\frac{x \cdot b \cdot p}{C} = \frac{h - s}{a} \quad (4.2.1)$$

Betragtes hele skivedelen fra figur 4.18 under ét, fås ved vandret projektion og momentligevægt, at

$$R = (a + \lambda) b p$$



Figur 4.18: Opdeling af skive.

$$T = C = \frac{a(a + \lambda)}{2(h - s)} b p$$

Udtrykket for trykresultanten  $C$  indsættes i (4.2.1), og derved findes:

$$x = \frac{1}{2}(a + \lambda) \quad (4.2.2)$$

Med  $x$  bestemt ved (4.2.2) er ligevægt sikret for samtlige delområder fra figur 4.18, og spændingerne i disse områder kan bestemmes ved projektion på en række forskellige snit gennem skiven. Regnedet med toakset hydrostatisk tryk i område VI, svarende til

$$\lambda = \frac{2s(h - s)}{a} \quad (4.2.3)$$

bliver hovedspændingerne i de forskellige områder som følger:

$$\text{Område I: } \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -p \end{cases}$$

Område II:

$$\sigma_1 = - \frac{a^2 + 2s(h-s)}{a^2 + 2(2h-s)(h-s)} p$$

$$\sigma_2 = - \frac{a^2 + 2s(h-s)}{2s(h-s)} p$$

Område III:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = - \frac{(a^2 + 2s(h-s))(a^2 + (h-s)^2)}{(h-s)(a^2(h+s) + 2s(h-s)^2)} p$$

Område IV:

$$\sigma_1 = -p$$

$$\sigma_2 = - \frac{a^2 + 2s(h-s)}{2s(h-s)} p$$

Område V:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

Område VI:

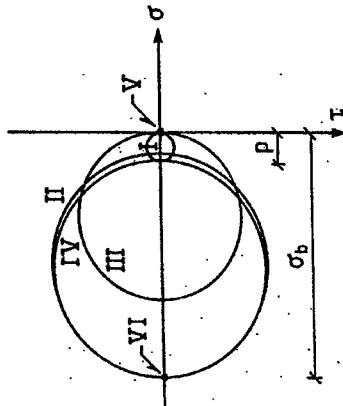
$$\sigma_1 = - \frac{a^2 + 2s(h-s)}{2s(h-s)} p$$

$$\sigma_2 = - \frac{a^2 + 2s(h-s)}{2s(h-s)} p$$

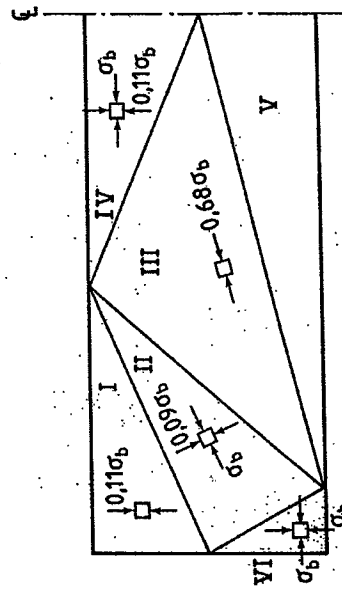
På figur 4.19 er de fundne spændingstilstande illustreret ved de tilhørende Mohr'ske cirkler for et eksempel med  $a/h = 2$  og  $s/h = \frac{1}{4}$ . Hovedspændingerne er for det samme eksempel indtegnet i de forskellige områder af skiven på figur 4.20.

Med den ovenfor beskrevne spændingstilstand optræder der ingen steder træk i betonen. Såfremt armeringen kan optage den for lige- vægten nødvendige trækraft  $T$ , vil spændingstilstanden derfor være sikker, hvis den numerisk største hovedspænding, der optræder samtidigt i område II, IV og VI, ikke overstiger betonens énaksede trykstyrke  $f_c^*$ , det vil sige, at

$$\sigma_b = \frac{a^2 + 2s(h-s)}{2s(h-s)} p \leq f_c^*$$



Figur 4.19: Mohr's cirkler for spændingerne i områderne fra figur 4.18.



Figur 4.20: Hovedspændinger ved  $a/h = 2$  og  $s/h = \frac{1}{4}$ .

Den bedste nedrevardi for en fastlagt værdi af  $s$  er således:

$$p = \frac{2s(h-s)}{a^2 + 2s(h-s)} f_c^* \quad (4.2.4)$$

Udtrykket (4.2.4) antager sin maksimalværdi for  $s = \frac{1}{2}h$ . Det må imidlertid kræves, at trækraften i armeringen ikke overstiger armeringens flydekraft, altså at

$$s \leq \frac{1}{2}h$$

hvor  $\phi$  er den mekaniske armeringsgrad indført i (4.1.40). Den bedste nedrevardi ved en given armeringsgrad fås derfor, når

$$s = \frac{1}{2}h, \quad \phi \leq \frac{1}{2}$$

$$s = \frac{1}{2}h, \quad \phi > \frac{1}{2}$$

Den formelle forskydningspænding over lejekanten indføres ved

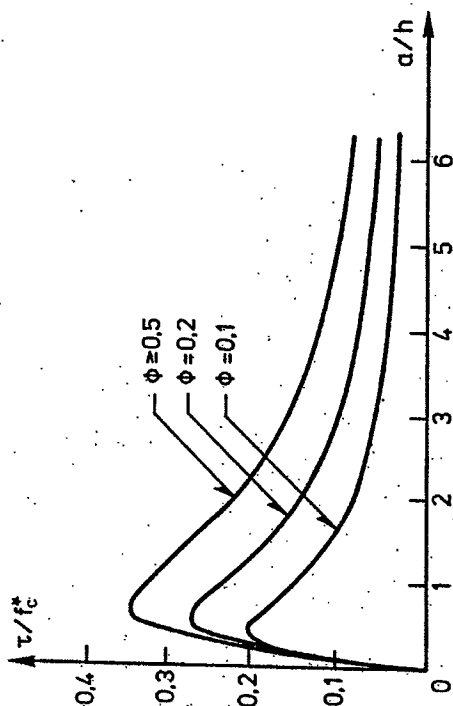
$$\tau = \frac{pa}{h} \quad (4.2.5)$$

så løsningen (4.2.4) kan med indsættelse af de optimerede værdier af  $s$  omskrives til

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{2\phi(1-\phi)ah}{a^2 + 2\phi(1-\phi)h^2}, \quad \phi \leq \frac{1}{2} \quad (4.2.6)$$

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{ah}{2a^2 + h^2}, \quad \phi > \frac{1}{2} \quad (4.2.7)$$

Barevnefunktionerne (4.2.6) og (4.2.7) er afbildet på figur 4.21.



Figur 4.21: Barevnens afhængighed af  $a/h$ .

#### 4.2.2 Øvre værdiløsning

Øvre værdiløsningen baseres på mekanismen fra figur 4.22. Den pågældende mekanisme er et rent bøjningsbrud opstået ved, at de to bjælkehalvdele begge drejer vinklen  $\eta$  om punkt O.

Når armeringen ligger højden  $y$  over skivens underkant, bliver det indre arbejde ved den viste mekanisme

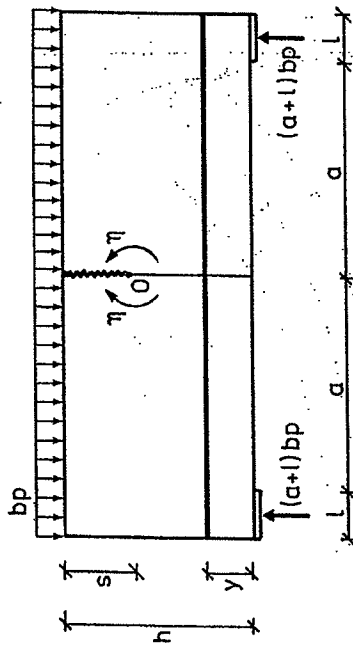
$$W_I = 2(\frac{1}{2}s^2 + \phi h(h-s-y))\eta b f_c^*$$

medens det ydre arbejde bliver

$$W_E = 2 \cdot \frac{1}{2} a(a+l)\eta b p$$

Barevnen er dermed givet ved

$$p = \frac{\frac{1}{2}s^2 + \phi h(h-s-y)}{\frac{1}{2}a(a+l)} f_c^* \quad (4.2.8)$$



Figur 4.22: Mekanisme anvendt ved øvrevaridløsning.

Optimeres med hensyn til  $s$ , fås

$$s = \phi h$$

hvilket indsat i (4.2.8) giver

$$p = \frac{2 \phi h (h - \frac{1}{2} \phi h - y)}{a(a + l)} f_c^* \quad (4.2.9)$$

For at undgå lejebrud må det kræves, at

$$(a + l)p < l f_c^*$$

Den mindste lejevidde, der kan tillades for at nå til løsningen (4.2.9), er derfor

$$l = \frac{2 \phi h (h - \frac{1}{2} \phi h - y)}{a} \quad (4.2.10)$$

Indføres igen den formelle forskydningspænding  $\tau$  fra (4.2.5), og indsættes (4.2.10) i (4.2.9), fås

$$\tau = \frac{2 \phi (h - \frac{1}{2} \phi h - y) a}{a^2 + 2 \phi h (h - \frac{1}{2} \phi h - y)} \quad (4.2.11)$$

Lægges armeringen i overensstemmelse med nedreværdiløsningen, det vil sige

$$y = \frac{1}{2} \phi h, \quad \phi \leq \frac{1}{2} \quad (4.2.12)$$

findes bæreevnen af (4.2.11) til:

$$\tau = \frac{2 \phi (1 - \phi) a h}{a^2 + 2 \phi (1 - \phi) h^2}, \quad \phi \leq \frac{1}{2} \quad (4.2.13)$$

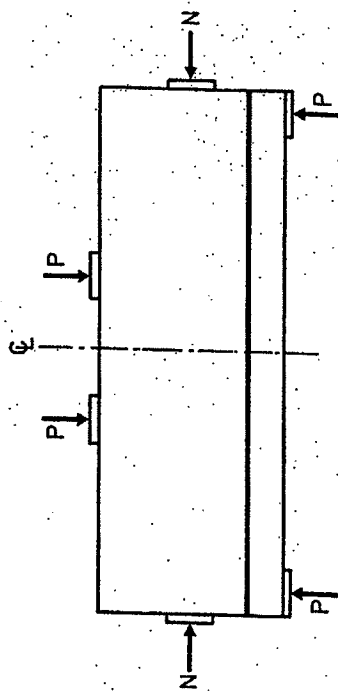
Det ses, at (4.2.13) er identisk med (4.2.6), så hvis armeringens placering og lejevidden er afpasset i overensstemmelse med nedreværdiløsningen fra afsnit 4.2.2, er denne løsning derfor eksakt, når  $\phi \leq \frac{1}{2}$ .

Der savnes derimod sammenfaldende nedre- og øvrevaridløsning for  $\phi > \frac{1}{2}$ .

Endvidere ses, at udtrykket (4.2.11) vokser med aftagende værdier af  $y$ , så af hensyn til sikringen af det optimale skivedesign mangler der et øvrevaridimensionst bevis for, at (4.2.12) virkelig leder til den størst opnåelige bæreevne for den givne skive.

### 4.3 Koncentreret last og central normalkraft

Skiven fra figur 4.23 regnes foruden den lodrette koncentrerede last også påvirket af en central normalkraft, der virker gennem en lastplade i hver ende af skiven.



Figur 4.23: Skive med koncentreret last og central normalkraft.

#### 4.3.1 Nedreverdiløsning

Den til nedreverdiløsningen benyttede opdeling af skiven i områder med homogene spændingstilstande fremgår af figur 4.24.

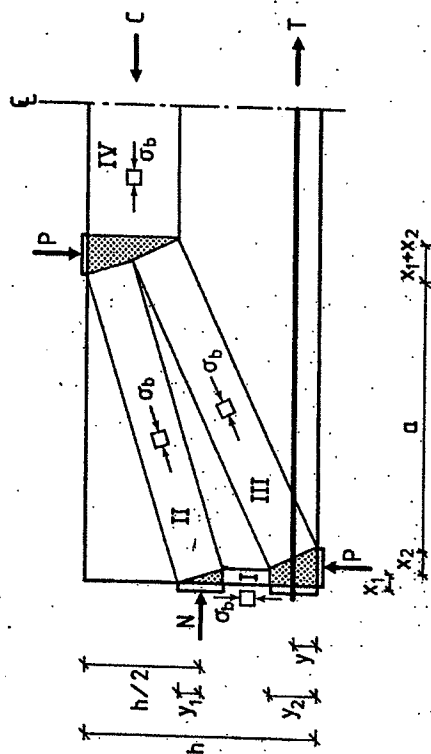
I områderne benævnt I-IV regnes som vist med et énakset tryk af størrelsen  $\sigma_b$ , medens der i de på figuren skraverede områder er toakset hydrostatisk tryk, også af størrelsen  $\sigma_b$ . Sættes  $\sigma_b = f^* f_C$  følger, at

$$Y_1 = \frac{N}{b f^* f_C}$$

$$Y_2 = \frac{A_b \cdot f_C}{b f^* f_C}$$

hvor det kræves, at

$$\frac{1}{2} Y_1 + Y_2 \leq \frac{1}{2} h \quad (4.3.1)$$



Figur 4.24: Spændingstilstand ved koncentreret last og central normalkraft.

Indføres foruden den mekaniske armeringsgrad  $\phi$  fra (4.1.10) og så størrelsen  $\pi$  ved

$$\pi = \frac{N}{b h f^* f_C}, \quad 0 \leq \pi \leq 1 \quad (4.3.2)$$

fås, så lange armeringen flyder, at

$$Y_1 = \pi h \quad (4.3.3)$$

$$Y_2 = \phi h \quad (4.3.4)$$

og af figur 4.24 findes derefter

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4 \pi h \left( \frac{1}{2} + \pi \right) h - \pi h} + (a + x_2) \right)^2 - (a + x_2) \quad (4.3.5)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4 \phi h \left( \frac{1}{2} - \pi \right) h - \phi h} + (a + x_1) \right)^2 - (a + x_1) \quad (4.3.6)$$

Af (4.3.5) og (4.3.6) fås så, at

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2\pi(1 - \pi - 2\phi) + 4\phi(1 - \phi)} h^2 + a^2 - a) \quad (4.3.7)$$

Bareevnen bestemmes nu ved

$$\frac{\tau}{f_C^*} = \frac{p}{b h f_C^*} = \frac{b(x_1 + x_2)f_C^*}{b h f_C^*} \quad (4.3.8)$$

og eftersom kravet (4.3.1) er ensbetydende med

$$\pi \leq 1 - 2\phi \quad (4.3.9)$$

leder (4.3.7) og (4.3.8) til

$$\frac{\tau}{f_C^*} = \frac{1}{2} (\sqrt{2\pi(1 - \pi - 2\phi) + 4\phi(1 - \phi)} + (\frac{a}{h})^2 - \frac{a}{h}), \quad 0 \leq \pi \leq 1 - 2\phi \quad (4.3.10)$$

Såfremt (4.3.9) ikke er opfyldt, opstår der ikke flydning i armeringen, og (4.3.4) erstattes af

$$y_2 = \frac{1}{2}(1 - \pi)h \quad (4.3.11)$$

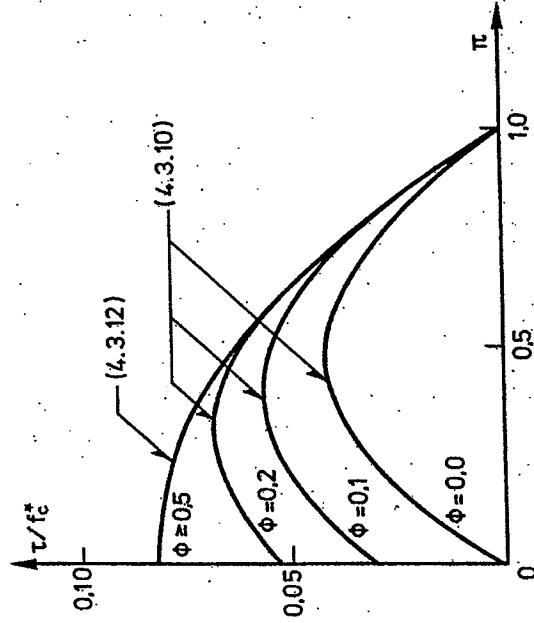
medens (4.3.3) bibeholdes. I så fald bliver

$$\frac{\tau}{f_C^*} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - \pi^2 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}), \quad 1 - 2\phi \leq \pi \leq 1 \quad (4.3.12)$$

Det bemærkes, at den angivne spændingsfordeling kræver længdearmeringen beliggende højden  $y$  over bunden, hvor

$$y = \frac{1}{2}y_2 \quad (4.3.13)$$

På figur 4.25 ses bareevnen bestemt ved (4.3.10) og (4.3.12) optegnet som funktion af størrelsen  $\pi$  ved forskellige værdier af armeringsgraden  $\phi$  og ved forskydningspændviddeforholdet  $\frac{a}{h} = 3$ .



Figur 4.25: Normalkraftens indflydelse på bareevnen ved  $\frac{a}{h} = 3$ .

#### 4.3.2 Øvre værdiløsning

En øvre værdiløsning kan bestemmes på basis af mekanismen fra figur 4.26, hvor skivedelen beliggende over understøtningen drejes vinklen  $\eta$  om punkt O i forhold til skivens midterdel.

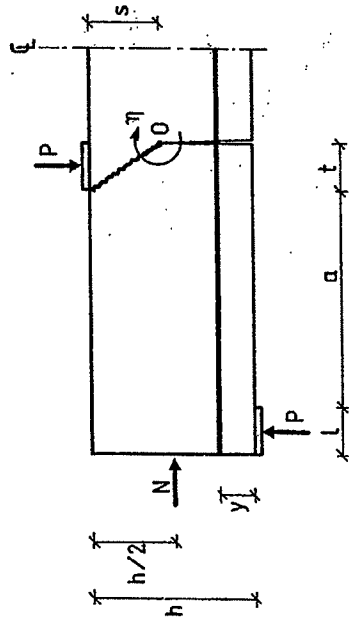
Det indre arbejde bliver ved den viste brudfigur

$$w_I = (\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} s^2) \eta b f_C^* + \phi h (h - s - y) \eta b f_C^*$$

medens det ydre arbejde er

$$w_E = (a + \frac{1}{2} l + t) \eta p - (\frac{1}{2} h - s) \eta N$$





Figur 4.26: Brudfigur.

Af arbejdsrelationen findes så bæreevneudtrykket for en given normal-  
kraft

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{t^2 + s^2 + 2\phi h(h - s - y) + \pi h(h - 2s)}{2a + l + 2t} \quad (4.3.14)$$

Optimeres (4.3.14) med hensyn til s og t findes

$$s = (\phi + \pi)h$$

$$t = \frac{1}{2}(\sqrt{(2a + l)^2 + 4\pi h(h - \pi h - 2\phi h) + 4\phi h(2h - \phi h - y)} - (2a + l))$$

Indsættes dette i (4.3.14) fås

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{(2a + l) + 4\pi h(h - \pi h - 2\phi h) + 4\phi h(2h - \phi h - y)} - (2a + l)) \quad (4.3.15)$$

For at undgå lejebrud må det kræves, at

$$b l f_c^* \geq P$$

Den mindste lejevidde, der kan tillades ved anvendelse af (4.3.15), er  
derfor

$$l = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 2\pi h(h - \pi h - 2\phi h) + 4\phi h(2h - \phi h - y)} - a) \quad (4.3.16)$$

Indsættes (4.3.16) i (4.3.15) fås

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 2\pi h(h - \pi h - 2\phi h) + 2\phi h(2h - \phi h - y)} - a) \quad (4.3.17)$$

Lægges armeringen i overensstemmelse med nedreverdiløsningen, altså

$$y = \frac{1}{2}\phi h \quad \pi \leq 1 - 2\phi \quad (4.3.18)$$

findes bæreevnen

$$\frac{P}{b f_c^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{2\pi(1 - \pi - 2\phi) + 4\phi(1 - \phi) + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) \quad \pi \leq 1 - 2\phi \quad (4.3.19)$$

hvor

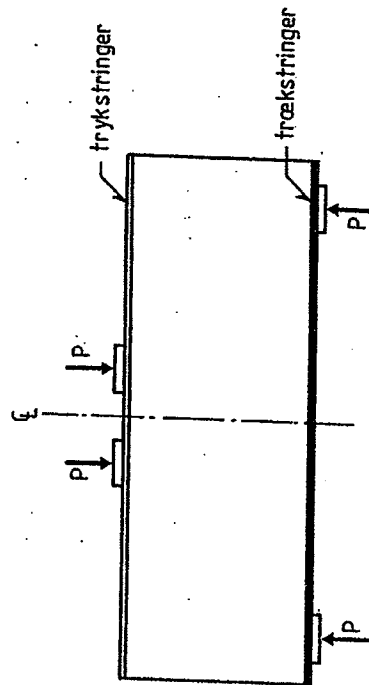
$$\tau = \frac{P}{b h}$$

Løsningen (4.3.19) er identisk med (4.3.10), som dermed er en eksakt  
løsning. For store armeringsgrader, dvs.  $\phi > \frac{1}{2}(1 - \pi)$  mangler til-  
gængæld stadig sammenfaldende øvre- og nedrevardi, og endvidere sav-  
nes et øvrevardi-bevis for at armeringens placering givet ved (4.3.18)  
virkelig er den optimale, når  $\tau$  bestemmes ved (4.3.16).

## 5. SKIVER/BJÆLKER MED FORSKYDNINGSSPÆNDING

### 5.1 Koncentreret last, lodrette bjælker

En simpelt understøttet skive tænktes angrebet af to symmetriske placerede enkeltkræfter, se figur 5.1.



Figur 5.1: Skive med koncentreret last.

Skivens krop antages forsynet med lodrette bjælker placeret med så lille indbyrdes afstand, at kræfter i bjælkerne kan erstattes af en ækvivalent bøjlespænding,  $\sigma_{ay}$ . Bjælernes indbyrdes afstand betegnes  $c$ , så krydets betonareal  $bc$  af bøjlearealet  $A_s$ , bliver den ækvivalente bøjlespænding

$$\sigma_{ay} = \frac{A_s \sigma_{as}}{bc} = \phi_a \sigma_{as} \quad (5.1.1)$$

når  $\sigma_{as}$  er spændingen i bjælkerne, og skivetykkelsen fortsat betegnes  $b$ . I (5.1.1) er endvidere indført betegnelsen  $\phi_a$  for den geometriske armeringsgrad.

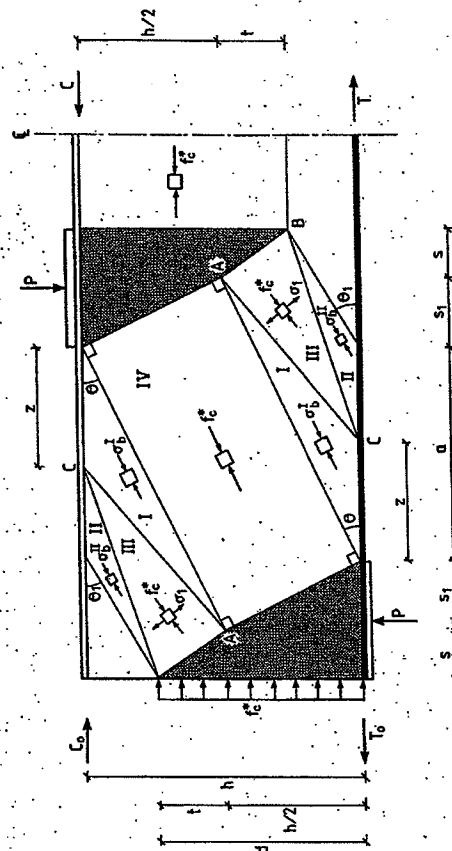
Som det er antaget på figur 5.1 idealiseres skivens trykzone og trækarmingen i bunden som stringere.

Ved øvre- og nedrevardiløsningen gennemgås i afsnit 5.1.1 og 5.1.2, henholdsvis, antages de nævnte stringere at være tilstræk-

kelig stærke til at flydning i disse ikke bliver aktuel. Hvad denne antagelse er ensbetydende med af krav til stringernes styrke tages op i afsnit 5.1.3, hvor specielt betydningen af mindre styrker af hovedarmeringen, altså trækstringeren, for skivens virkemåde i brudstadiet diskuteres nærmere.

### 5.1.1 Nedrevardiløsning

I første omgang betragtes en spændingstilstand i betonen i skivekroppen som vist på figur 5.2.



Figur 5.2: Opdeling af skive i områder med homogene spændingstilstande.

I de på figuren skrevarede områder regnes spændingstilstanden i betonen udgjort af et toakset hydrostatisk tryk af størrelsen  $f_c$ . I område IV regnes med et énakset tryk af størrelsen  $f_c$  under vinklen  $\theta$  med vandret. Også i områderne benævnt I regnes med et énakset tryk under vinklen  $\theta$  med vandret, og trykket er her:

$$\sigma_b^I \leq f_c^* \quad (5.1.2)$$

Endelig er der også ønsket tryk i områderne betegnet II, men her forløbende under vinklen  $\theta_1$  med vandret. Forudsættes flydning i forskydningsarmeringen over strækningen a, bliver den ækvivalente bøjlespænding, der er lodret:

$$\sigma_{ay} = \varphi_a f_{ys} = \psi f_c^* \quad (5.1.3)$$

hvor  $f_{ys}$  er bøjlernes flydespænding, og den indførte størrelse  $\psi$  kaldes den mekaniske forskydningsarmeringsgrad. Da den samlede normalspænding i vandrette snit langs stringerne skal være nul, bliver så

$$\sigma_b^I = \frac{\psi}{\sin^2 \theta_1} f_c^* \quad (5.1.4)$$

medens trykket i områderne II bliver

$$\sigma_b^{II} = \frac{\psi}{\sin^2 \theta_1} f_c^* \quad (5.1.5)$$

Når (5.1.2) er opfyldt, er

$$\theta_1 \geq \theta$$

hvorved det af (5.1.4) og (5.1.5) ses, at

$$\sigma_b^{II} \leq \sigma_b^I \quad (5.1.6)$$

Ligevegt af områderne I - III kræver ved projekktion

$$s f_c^* = a \psi f_c^* \quad (5.1.7)$$

og ved momentligevegt fås

$$\left(\frac{1}{2} h - \frac{1}{2} t\right) t f_c^* = \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} s + s_1\right) a \psi f_c^* \quad (5.1.8)$$

hvor

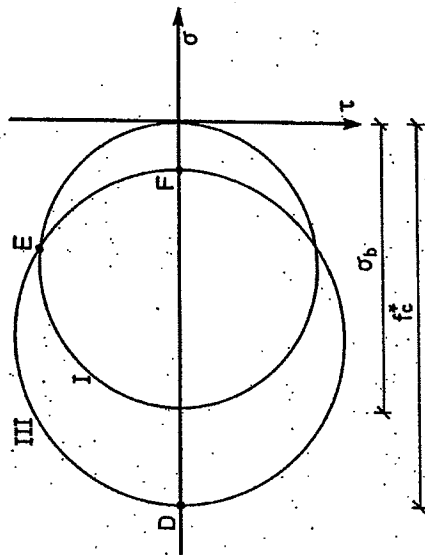
$$s_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + h^2} - a) \quad (5.1.9)$$

Med s og t bestemt ved (5.1.7) og (5.1.8) bliver den samlede spændingstilstand statisk mulig, såfremt z bestemmes således, at

$$z \sigma_b^I \sin \theta \cos \theta + (a - z) \sigma_b^{II} \sin \theta_1 \cos \theta_1 = t f_c^* \quad (5.1.10)$$

Om spændingstilstanden i områderne benævnt III vides, at den ene hovedspænding er et tryk af størrelsen  $f_c^*$  stående vinkelret på linien AB.

Den anden hovedspænding i område III kan derefter bestemmes ved at betragte de to Mohr'ske cirkler for områderne I og II, se figur 5.3.



Figur 5.3: Mohr's cirkler for betonspændingerne i område I og III.

Mohr's cirkel for område I kan uden videre optegnes. Punkt D, hvor  $(\sigma, \tau) = (-f_c^*, 0)$ , ligger på Mohr's cirkel for område III. Kontinuitet i snit AC fra figur 5.2 kræver nu, at de to cirkler fra figur 5.3 har et punkt E fælles. Dette betyder, at når (5.1.2) er opfyldt,

Imidlertid kan trækspændingen i bjælkerne ikke overstige flyde-  
spændingen  $f_{ys}$ , så når (5.1.15) i alle tilfælde skal opfyldes,  
må (5.1.17) suppleres med

$$\sin^2 \theta = \frac{\sigma_a \cdot f_{ys}}{f_c^*} = \psi \quad \text{for } \psi \leq \frac{1}{2} \quad (5.1.18)$$

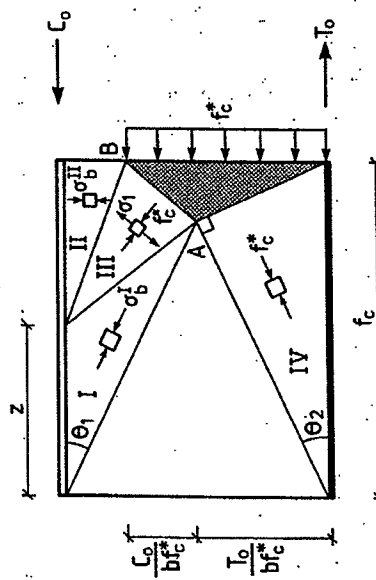
Indsættes (5.1.18) og (5.1.17) i (5.1.16) findes herefter nedre-  
værdien

$$\frac{I}{f_c^*} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad , \quad \psi \leq \frac{1}{2} \quad (5.1.19)$$

$$\frac{I}{f_c^*} = \frac{1}{2} \quad , \quad \psi \geq \frac{1}{2} \quad (5.1.20)$$

som altså anvendes, når (5.1.14) ikke er opfyldt.

De benyttede spændingsfordelinger fra figurerne 5.2 og 5.4 kan kun  
etableres, hvis der bag lejret findes en forlængelse af skiven, der  
kan optage de på de to figurer angivne snitlaste i det lodrette  
snit bag lejepladen, se figur 5.5.



Figur 5.5: Spændingsfordeling i forankringszone

Når normalspændingen  $f_c^*$  virker over strækningen  $d$ , kræver li-  
gevægt, at

$$T_0 = \frac{d(2h-d)}{2h} \cdot b \cdot f_c^* \quad (5.1.21)$$

$$C_0 = -\frac{d^2}{2h} \cdot b \cdot f_c^* \quad (5.1.22)$$

I forankringszonen er en mulig spændingsfordeling i betonen vist  
på figur 5.5. I det på figuren skraverede område regnes med toak-  
set hydrostatisk tryk af størrelsen  $f_c^*$ , og i område IV regnes  
med et énakset tryk af størrelsen  $f_c^*$  under vinklen  $\theta_2$  med  
vandret. I område I regnes tilsvarende med et énakset tryk af  
størrelsen  $\sigma_b^I$  under vinklen  $\theta_1 \geq \theta_2$  med vandret og i område  
II med et lodret énakset tryk af størrelsen  $\sigma_b^{II}$ . I område III  
er spændingstilstanden toakset, og anden hovedspænding er et tryk,  
 $f_c^*$ , stående vinkelret på linien AB. Fastsættes størrelsen  $z$ ,  
så

$$z \text{ b } \sigma_b^I \sin \theta_1 \cos \theta_1 = |C_0|$$

er den beskrevne spændingstilstand statisk mulig, hvis der i  
forankringszonen er lodrette bjælker, der optager den ækvivalente  
bøjlespænding:

$$\sigma_{ay} = f_c^* \sin^2 \theta_1 = \sigma_b^I \sin^2 \theta_2 = \sigma_b^{II} \quad (5.1.23)$$

således, at den samlede lodrette normalspænding i vandrette snit  
langs stringerne er nul. Af (5.1.23) fås, at

$$\sigma_b^{II} < \sigma_b^I \leq f_c^*$$

og ved at optegne Mohrs cirkler for område II og III analogt  
til figur 5.3 ses endvidere, at

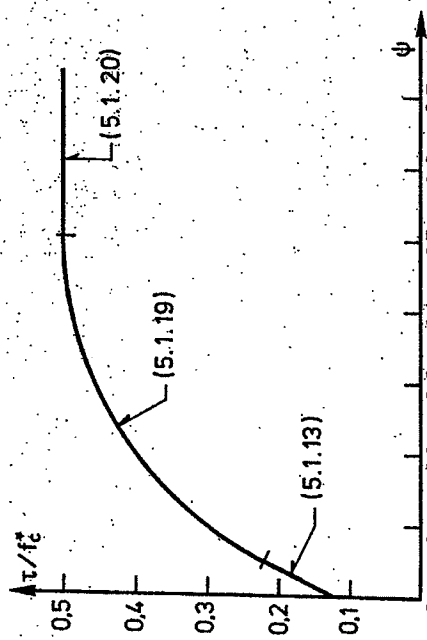
$$-f_c^* \leq \sigma_1 \leq 0$$

Spændingstilstanden i betonen er derfor sikker. Sættes derefter  
 $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ , og forsynes forankringszonen med lodrette bjælker, så den  
mekaniske forskydningsarmingsgrad i dette område bliver  
 $\psi = \frac{1}{2}$ , da kan snitkræfterne i det lodrette snit bag lejepladen  
optages i alle tilfælde, hvis

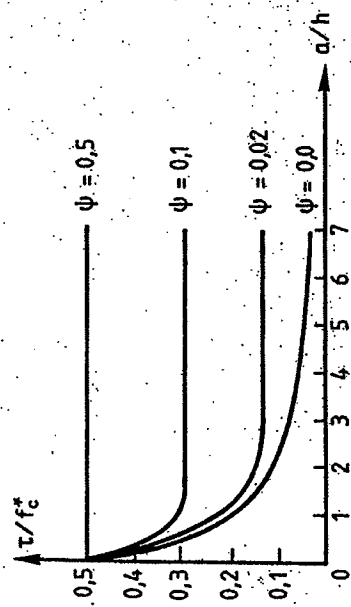
$$\frac{1}{2} f_c^* l_a = \tau_0$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$l_a = \frac{d(2h-d)}{h} \quad (5.1.24)$$



Figur 5.6: Bæreevnen som funktion af  $\psi$  ved  $a/h = 2$ .

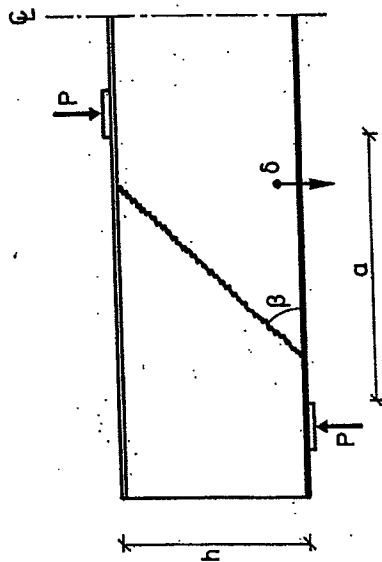


Figur 5.7: Bæreevnen som funktion af  $a/h$ .

Er disse krav opfyldt, er løsningerne (5.1.13) og (5.1.19)-(5.1.20) sammen med overgangsbetingelsen (5.1.14) fuldt korrekte nedrevar-diløsninger. Bæreevnen bestemt på basis heraf er illustreret på figurene 5.6 og 5.7.

#### 5.1.2 Øvrevaridløsning

Ved udledning af øvrevaridløsningen anvendes brudmekanismen, der er skitseret på figur 5.8. Ved den viste mekanisme translateres skivens midterdel stykket  $\delta$  lodret nedad i forhold til skivens delen over understøtningen, idet der dannes en ret brudlinje gennem skiven under vinklen  $\beta$  med vandret.



Figur 5.8: Brudmekanisme

Ingen af stringerne yder noget bidrag til det indre arbejde ved deformationen, idet retningen for den relative bevægelse er vinkelret på stringerne. Regnes som forudsat bøjlearmeringen jævnt fordelt, bliver den totale dissipation derfor

$$W_I = \frac{1}{2} \delta b \frac{h}{\sin \beta} f_c^* (1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)) + \delta b h |\cot \beta| \varphi_a f_y$$

hvor første led er bidraget fra betonen, jævnfør (3.1.13), og sidste led er bidraget fra forskydningsarmeringen.

Da det ydre arbejde ved den viste mekanisme er

$$W_E = \delta P$$

bestemmes bæreevnen ved brug af arbejdsaligheden til

$$P = \frac{1}{2} b h f_c^* (\sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta + 2\psi \cot \beta) \quad (5.1.25)$$

Den mindste bæreevne findes for

$$\cot \beta = \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}} \quad , \quad \psi \leq \frac{1}{2} \quad (5.1.26)$$

$$\cot \beta = 0 \quad , \quad \psi > \frac{1}{2} \quad (5.1.27)$$

Udtrykt ved den formelle forskydningssspænding,  $\tau$ , fra (5.1.12), giver (5.1.26) og (5.1.27) indsat i (5.1.25) øvreverdløsningen:

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad , \quad \psi \leq \frac{1}{2} \quad (5.1.28)$$

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{1}{2} \quad , \quad \psi > \frac{1}{2} \quad (5.1.29)$$

Ved bestemmelsen af den optimale værdi af  $\cot \beta$  må det dog forlænges, at

$$\cot \beta \leq \frac{a}{h} \quad (5.1.30)$$

for at sikre en kinematisk mulig brudfigur. Med  $a \geq 0$  betyder dette ingen restriktion ved anvendelse af (5.1.29), jævnfør (5.1.27); medens det af (5.1.26) ses, at når

$$\frac{a}{h} \leq \frac{1 - 2\psi}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}} \quad (5.1.31)$$

må løsningen (5.1.28) erstattes af

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) + \psi \frac{a}{h} \quad (5.1.32)$$

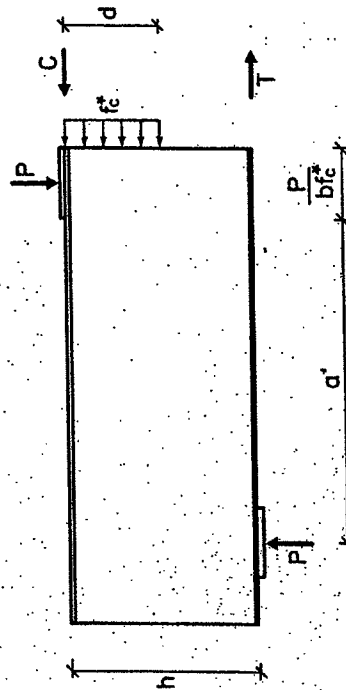
svarende til i (5.1.25) at sætte

$$\cot \beta = \frac{a}{h}$$

Da ovenstående bæreevneudtryk (5.1.32) og (5.1.28)-(5.1.29) sammen med overgangsbetingelsen (5.1.31) er identisk med nedreværdiløsningen fra afsnit 5.1, udgør de tilsammen den eksakte løsning.

### 5.1.3 Længdearmeringens indflydelse

Svarende til løsningerne (5.1.13) og (5.1.19)-(5.1.20) bliver snitkræfterne i et snit umiddelbart bag lastpladen som vist på figur 5.9.



Figur 5.9: Snitkræfter ved skivemidte.

Med betegnelsen  $a'$  fra figuren giver momentligevægt om trykstringeren i det nævnte snit

$$P(a' + \frac{1}{2} \frac{P}{b f_c^*}) = h \tau - \frac{1}{2} b d^2 f_c^* \quad (5.1.33)$$

Indføres for hovedarmeringen den mekaniske armeringsgrad fra (4.1.40), må det altså kræves, at

$$\phi \geq \frac{P}{b h f_c^*} (\frac{a'}{h} + \frac{1}{2} \frac{P}{b h f_c^*}) + \frac{1}{2} (\frac{d}{h})^2 \quad (5.1.34)$$

for at løsningen fra afsnit 5.1.1 udgør en sand nedreværdi.

Svarende til specielt løsningen (5.1.19), hvor

$$P = b h f_c^* \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad , \quad \psi \leq \frac{1}{2}$$

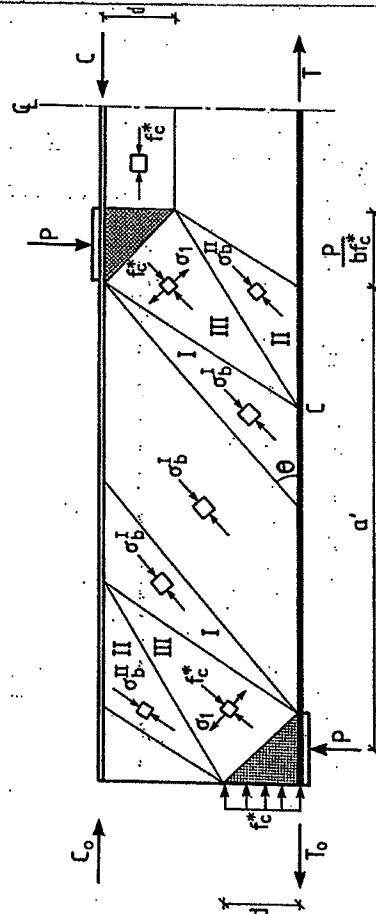
leder (5.1.34) til

$$\phi \geq \frac{a'}{h} \sqrt{\psi(1-\psi)} + \frac{1}{2}(1-\psi) \quad (5.1.35)$$

idet man ved betragtning af figur 5.4 finder:

$$d = h - \frac{P}{b f_c^*} \tan \theta = (1 - \psi) h$$

Er (5.1.35) ikke opfyldt, må spændingsfordelingen fra figur 5.4 ændres f.eks. til det på figur 5.10 viste.



Figur 5.10: Spændingsfordeling ved svag hovedarmring.

Spændingsfordelingen i områderne I, II og III fra figur 5.10 er ganske analog til spændingsfordelingen i de tilsvarende områder fra figur 5.4, og er altså for en bestemt placering af punkterne C statisk mulig samt desuden sikker, såfremt

$$\sigma_b^I \leq f_c^* \quad (5.1.36)$$

Regnes med flydning i bøjlerne leder randbetingelsen langs strin-  
gerne til

$$\sigma_b^I = \psi(1 + \cot^2 \theta) f_c^* \quad (5.1.37)$$

og lasten bliver da

$$P = b h \cot \theta \psi f_c^*$$

det vil sige, at

$$h \cot \theta = \frac{1}{\psi} \frac{P}{b f_c^*}$$

Ved ligevegt for områderne I, II og III fås så

$$d = h - \sqrt{h^2 - \frac{1+\psi}{\psi} \left( \frac{P}{b f_c^*} \right)^2} \quad (5.1.38)$$

Forudsættes endvidere flydning i længearmringen findes ved momentligevegt i midtersnittet om trykstringeren for hele skivedelen fra figur 5.10:

$$\left( a' + \frac{1}{2} \frac{P}{b f_c^*} \right) P = \phi b h^2 f_c^* - \frac{1}{2} b d^2 f_c^* \quad (5.1.39)$$

idet snitkræfterne i snittet bag lejepladen forudsættes i ligevegt. Indsættes (5.1.38) i (5.1.39), og indføres den formelle forskydningspænding  $\tau$  fra (5.1.12), fås derefter

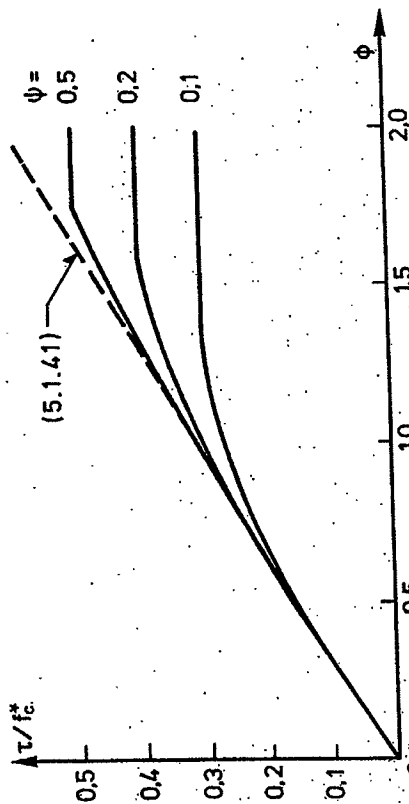
$$2 \frac{a'}{h} \frac{P}{f_c^*} + \left( \frac{P}{f_c^*} \right)^2 + \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{1+\psi}{\psi} \left( \frac{P}{f_c^*} \right)^2} \right]^2 - 2\phi = 0 \quad (5.1.40)$$

Dette udtryk kan for  $\psi \leq \frac{1}{2}$  anvendes, når

$$\phi \leq \frac{a'}{h} \sqrt{\psi(1-\psi)} + \frac{1}{2}(1-\psi) \quad (5.1.41)$$

da (5.1.36) så altid er opfyldt.

Bestemmelse af bæreevnen ud fra (5.1.40) kan foregå ved iteration, f.eks. ved hjælp af sekantmetoden, se [73.2].



Figur 5.11: Bæreevnen som funktion af  $\phi$  ved  $\frac{a'}{h} = 3$ .

Resultatet af en sådan beregning er illustreret på Figur 5.11. På figur 5.11 er de fundne bæreevner sammenlignet med den rene bøjningsbæreevne, der findes ved at se bort fra betontrykket i skivekroppen i bøjningsfaget. Herved erstattes (5.1.33) af

$$p(a' + \frac{1}{2} \frac{P}{b f_c^*}) = h T$$

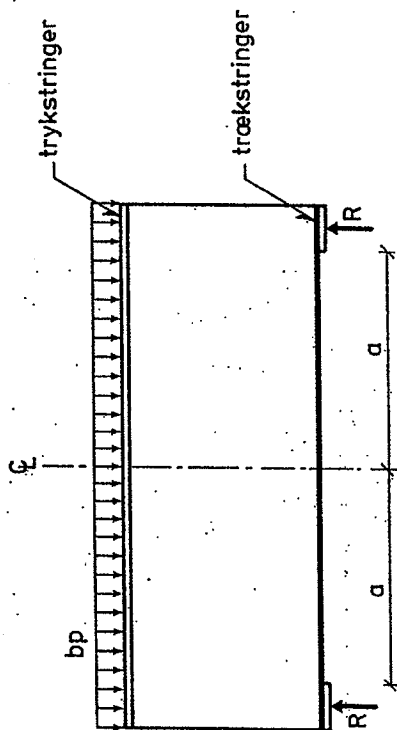
hvilket giver bæreevnen

$$\frac{T}{f_c} = \sqrt{\left(\frac{a'}{h}\right)^2 + 2\phi} - \frac{a'}{h} \quad (5.1.42)$$

som altså er på den usikre side.

## 5.2 Jævn fordelt last, lodrette bjælker

En skive som den i afsnit 5.1 behandlede tænkes påvirket af en jævnt fordelt belastning som vist på figur 5.12.



Figur 5.12: Skive med jævnt fordelt last.

Lasten påføres som en jævnt fordelt spænding på skivens overside.

Skiven regnes forsynet med lodrette bjælker som beskrevet i afsnit 5.1, og stringerne antages at være så stærke, at flydning i disse ikke bliver aktuel.

## 5.2.1 Nedreværdiløsning

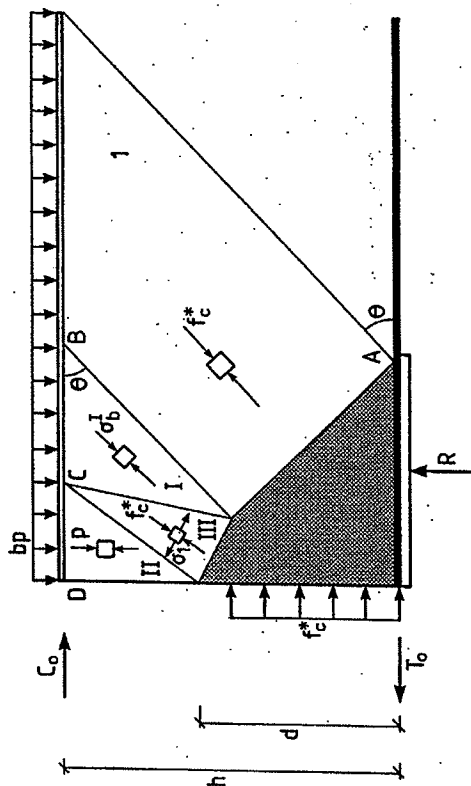
I omegnen nær understøtningen regnes med den på figur 5.13 viste spændingsfordeling i betonen.

I det skraverede område over understøtningen er der treakset hydrostatisk tryk af størrelsen  $f_c^*$ , medens der i område 1 er énakset tryk,  $f_c^*$ , under vinklen  $\theta$  med vandret. Lodret projektion på snit AB giver

$$b h f_c^* \sin \theta \cos \theta = b a p \quad (5.2.1)$$

Det vil sige, at





Figur 5.13: Betonspændinger nær understøtning.

$$\cot \theta = \frac{1}{2} \frac{p a}{f_c^*} \sqrt{(h f_c^*)^2 - 4(p a)^2} \quad (5.2.2)$$

Er der flydning i bøjljerne over strækningen  $h \cot \theta$  fra understøtningen, lyder randbetingelsen i det vandrette snit BC langs trykstringeren:

$$f_c^* \sin^2 \theta - \psi f_c^* = p \quad (5.2.3)$$

hvor  $\psi$  er indført ved (5.1.3).

Med  $\theta$  bestemt ved (5.2.2) findes af (5.2.3):

$$\frac{2(p a)^2}{(h f_c^*)^2 + 2 h f_c^* \sqrt{(h f_c^*)^2 - 4(p a)^2}} f_c^* - \psi f_c^* = p \quad (5.2.4)$$

Løses (5.2.4) med hensyn til  $p$ , fås

$$p = \frac{\frac{1}{2} f_c^*}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \left(1 - 2\psi + \sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{h}\right)^2 \psi(1-\psi)}\right) \quad (5.2.5)$$

hvilket udtrykt ved den formelle forskydningsspænding  $\tau$ :

$$\tau = \frac{p a}{h} \quad (5.2.6)$$

kan omskrives til

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \left(1 - 2\psi + \sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{h}\right)^2 \psi(1-\psi)}\right) \quad (5.2.7)$$

Ved indsættelse af (5.2.5) i (5.2.2) ses løsningen at svare til

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{h}\right)^2 \psi(1-\psi)} - 1}{2 \frac{a}{h} \psi} \quad (5.2.8)$$

Løsningen (5.2.7) er kun den optimale for

$$\psi \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{a}\right) \quad (5.2.9)$$

For større værdier af  $\psi$  opstår ikke flydning i bøjljerne, og (5.2.7) erstattes da med

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{1}{2} \quad (5.2.10)$$

svarende til, at

$$\cot \theta = 1 \quad (5.2.11)$$

Yderligere noteres, at hvis

$$\frac{a}{h} \leq 1 \quad (5.2.12)$$

fremkommer der ingen spændinger i bøjljerne, og bæreevnen findes så af (5.2.1) til

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{\frac{a}{h}}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \quad (5.2.13)$$

idet trykhældningen nu er bestemt ved:

$$\cot \theta = \frac{a}{h}$$

Spændingsfordelingen i områderne I, II og III er analog til fordelingen i de tilsvarende områder fra figur 5.2, og er for

en bestemt placering af punkt C statisk mulig. Den er desuden sikker, så længe

$$\sigma_b^I \leq f_c^* \quad (5.2.14)$$

Dette vil altid være opfyldt, fordi

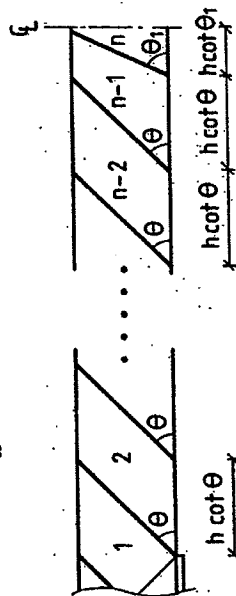
$$\sigma_b^I = (1 + \cot^2 \theta) p$$

samtidig med at betontrykket i område I kan skrives

$$f_c^* = (1 + \cot^2 \theta) (p + \sigma_{ay}^I) \geq \sigma_b^I$$

hvor  $\sigma_{ay}^I$  er den ækvivalente bøjlespænding på strækningen  $h \cot \theta$  fra understøtningen.

Det ses, at hvis  $\sigma_{ay}^I = 0$ , det vil sige når der ikke er nogen bjælke eller når (5.2.12) er opfyldt, vil lighedstegnet i (5.2.14) gælde. I det tilfælde forsvinder område II og III fra figur 5.13, idet punkterne C og E så netop falder sammen i punkt D. For at vise, at bæreevnen bestemt ved (5.2.7) og (5.2.10) med overgangsbetingelsen (5.2.9) virkelig er nedregrænser, skal der angives en statisk mulig og sikker spændingsfordeling i områderne  $i = (2;n)$ , for  $\frac{a}{h} > 1$ , se figur 5.14.



Figur 5.14.

Områderne  $i = (2;n-2)$  er parallellogrammer med den vandrette sidelængde  $h \cot \theta$ , hvor  $\theta$  er bestemt ved (5.2.8) eller (5.2.11).

I hvert af disse områder er der i betonen et énaksset tryk,  $\sigma_b^i$ , under vinklen  $\theta$  med vandret:

$$\sigma_b^i = f_c^* - (i-1) \cdot p(1 + \cot^2 \theta) < f_c^*$$

og den ækvivalente bøjlespænding,  $\sigma_{ay}^i$ , fra bjælkerne, der skærer skillelinien mellem område i og område  $i+1$ , bliver

$$\sigma_{ay}^i = \sigma_{ay}^I - (i-1)p < \sigma_{ay}^I \leq \psi f_c^*$$

Denne sikre spændingsfordeling opfylder randbetingelserne langs stringerne i områderne  $i = (2;n-2)$ . Den kan nu kun fortsættes ind i område  $n-1$ , når  $\frac{a}{h}$  er et helt multiplum af  $\cot \theta$ . Er dette ikke tilfældet må der etableres en anden spændingsfordeling i betonen i område  $n-1$ , f.eks. som vist på figur 5.15, hvor det pågældende område er delt op i tre underområder, IV, V og VI.

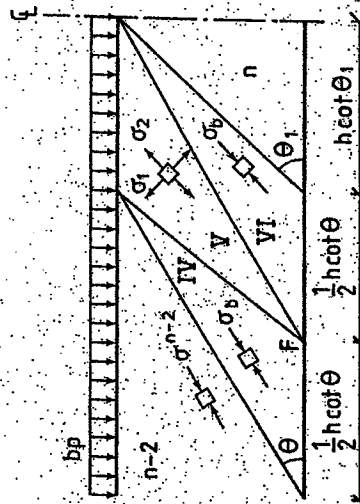


Fig. 5.15: Spændingsfordeling ved midtersnit.

Opdelingen af skiven i områderne  $i = (2;n-2)$  tænkes fortsat så langt ind mod skivens midtersnit, at

$$\cot \theta_1 \leq \cot \theta$$

I område IV regnes med et énakset tryk under vinklen  $\theta$  med vandret, et tryk som bliver

$$\sigma_b^{IV} = \cot\theta_1 (\tan\theta + \cot\theta) p < \sigma_b^{n-2} \leq f_c^*$$

I område VI regnes ligeledes med et énakset tryk, men her under vinklen  $\theta_1$  med vandret, og dette tryk er

$$\sigma_b^{VI} = \cot\theta_1 (\tan\theta + \frac{\cot^2\theta_1}{\cot\theta}) p \leq \sigma_b^I < f_c^*$$

Fastlægges punkt F derefter som vist på figur 5.15, er spændingsfordelingen statisk mulig, og spændingstilstanden i område V bliver toakset med hovedspændingerne:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2} p \left[ \left( \frac{3}{4} \cot\theta \cot\theta_1 + \frac{1}{4} \cot^2\theta \right) + 1 \right]$$

$$\mp \sqrt{\left( \frac{3}{4} \cot\theta \cot\theta_1 + \frac{1}{4} \cot^2\theta - 1 \right)^2 + (\cot\theta + \cot\theta_1)^2}$$

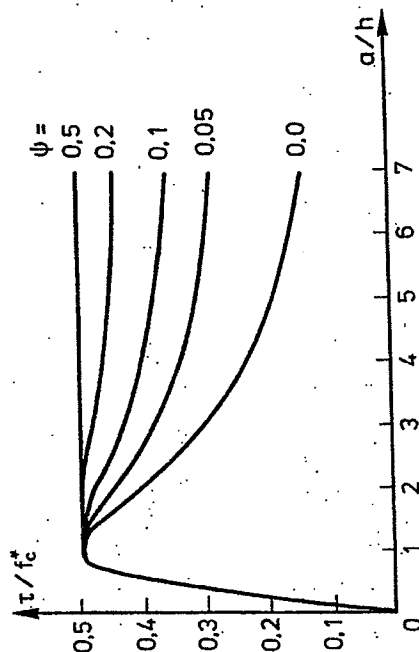
Ved indsættelse findes, at

$$\cot\theta_1 \leq \cot\theta \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \leq 0 \\ |\sigma_2| \leq p(1 + \cot^2\theta) < \sigma_b^{n-2} \leq f_c^* \end{cases}$$

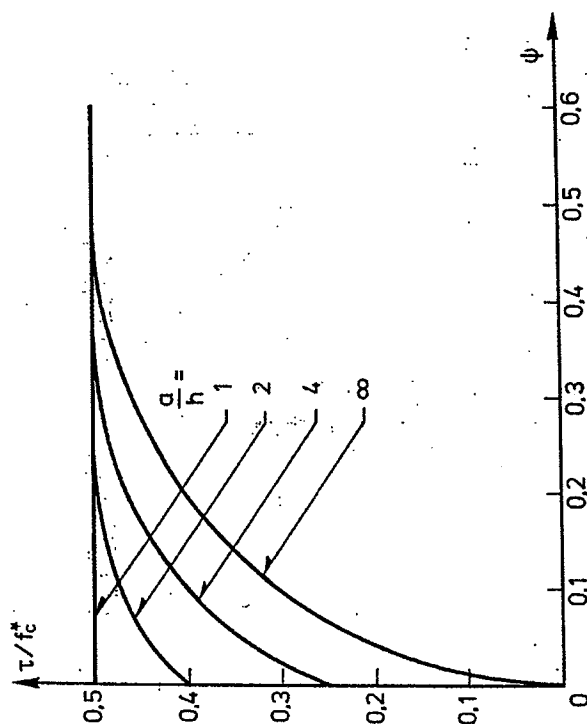
Den beskrevne spændingsfordeling i område n-1 er derfor sikker. På strækningen  $bc\theta_1$  fra skivens midte opstår ingen spændinger i bøjlerner, så område n fra figur 5.14 bliver spændingsløs.

Alt i alt ses, at løsningerne (5.2.7) og (5.2.10) med overgangsbetingelsen (5.2.9) udgør en sand nedregrænse for  $\frac{a}{h} \geq 1$ , såfremt der bag lejet findes en forankringszone, der kan optage snitkræfterne i snittet umiddelbart bag understøtningen, f.eks. som gennemgået i afsnit 5.1.1, se figur 5.5.

Ved den gennemgående løsning er der ingen spændinger i skivekroppen i skivens midtersnit. De maksimale stringerkræfter bestemmes



Figur 5.16.



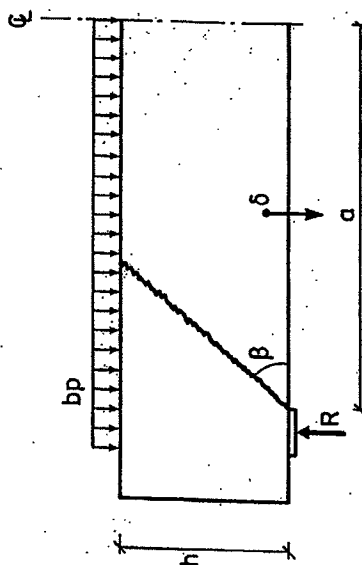
Figur 5.17.

derfor ved momentligevægt i dette snit uden hensyn til skivekroppen.

Bæreevnerne bestemt ved (5.2.7), (5.2.10) og (5.2.13) er anskueliggjort grafisk på figurerne 5.16 og 5.17. Bæreevnen for  $\frac{a}{h} \rightarrow \infty$  er identisk med bæreevnen for en koncentreret last på skiven, bestemt ved (5.1.19) og (5.1.20).

#### 5.2.2. Øvre værdiløsning

Der anvendes en mekanisme som vist på figur 5.18, hvor skivens midterdel translateres lodret nedad i forhold til skivedelen over understøtningen, idet der dannes en ret brudlinje forløbende under vinklen  $\beta$  med vandret fra understøtningens yderkant til skivens top.



Figur 5.18.

Det indre arbejde er ved denne mekanisme

$$W_I = \frac{1}{2} \delta b \frac{h}{\sin \beta} f_c^* (1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)) + \delta b h |\cot \beta| \varphi_f \frac{f_c}{a} y_s$$

Her er første led bidraget fra betonen, og sidste led er forskydningsarmeringens bidrag.

Det ydre arbejde bliver

$$W_E = \delta b p (a - h \cot \beta)$$

så af arbejdslikningen findes bæreevnen, udtrykt ved den formelle forskydningspænding  $\tau$  fra (5.2.6):

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2} \frac{a}{h} \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta + 2\psi |\cot \beta|}{\frac{a}{h} - \cot \beta} \quad (5.2.15)$$

Optimeres (5.2.15) med hensyn til  $\cot \beta$  findes

$$\cot \beta = \frac{1}{4\psi(1-\psi)\left(\frac{a}{h}\right)} [(1-2\psi)\sqrt{1+4\left(\frac{a}{h}\right)^2\psi(1-\psi)} - 1] \quad (5.2.16)$$

såfremt.

$$\psi \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a}\right) \quad (5.2.17)$$

Indsættes (5.2.16) i (5.2.15) fås da bæreevnen

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2} \frac{a}{h} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \left[1 - 2\psi + \sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{h}\right)^2\psi(1-\psi)}\right] \quad (5.2.18)$$

Er (5.2.17) ikke opfyldt findes i stedet

$$\cot \beta = 0 \quad (5.2.19)$$

hvilket indsat i (5.2.15) giver

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2} \quad (5.2.20)$$

Regnes der ikke med bøjler over understøtningen ændres udtrykket (5.2.15) for

$$\cot \beta < 0 \quad (5.2.21)$$

til

$$\frac{T}{f_c} = \frac{1}{2} \frac{a}{h} \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta}{h} \quad (5.2.22)$$

og i så fald findes optimum for

$$\cot \beta = \frac{a^2 - h^2}{2ah} \quad (5.2.23)$$

Dette giver indsæt i (5.2.22):

$$\frac{T}{f_c} = \frac{\frac{a}{h}}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \quad (5.2.24)$$

som kan benyttes, når (5.2.21) er opfyldt, hvilket, når  $\cot \beta$  bestemmes ved (5.2.23), er ensbetydende med

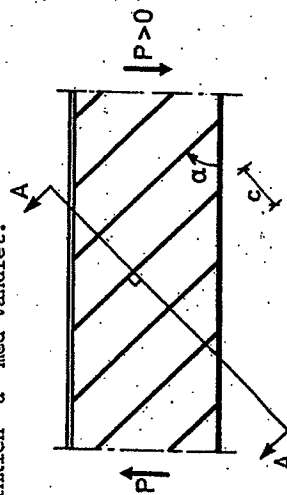
$$\frac{a}{h} < 1 \quad (5.2.25)$$

Eftersom (5.2.24) giver mindre bæreevner end (5.2.20), er det (5.2.24), der skal anvendes, når (5.2.25) er opfyldt. Af (5.2.17) ses, at bæreevneudtrykket (5.2.18) aldrig er aktuelt, når (5.2.25) er opfyldt.

Sammenlignes øvre værdiløsningen fra dette afsnit med nedreværdiløsningen fra afsnit (5.2.1), ses de to løsninger at være sammenfaldende, og de er derfor eksakte.

### 5.3 Koncentreret last, skrå bøjler

Der betragtes en skive med belastning som behandlet i afsnit 5.1, se figur 5.1, men hvor skiven nu er forsynet med bøjler stående under vinklen  $\alpha$  med vandret.



Figur 5.19: Skive med skrå bøjler.

Bøjlerne indbyrdes afstand, målt vinkelret på disse, betegnes  $c$ . Der indlægges et snit AA vinkelret på bøjlerne, og når betonarealet  $b c$  langs dette snit krydses af bøjlearealet  $A_s$ , indføres den geometriske forskydningsarmeringsgrad ved

$$\varphi_a = \frac{A_s}{b c} \quad (5.3.1)$$

og den mekaniske forskydningsarmeringsgrad ved

$$\psi = \varphi_a \frac{f_{ys}}{f_c} \quad (5.3.2)$$

hvor  $f_{ys}$  fortsat er bøjlernes flydespænding.

### 5.3.1 Nedreværdiløsning

Når forskydningskraften  $P$  angribes som på figur 5.19, forudsættes at bøjlerne er anbragt under vinklen  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Er der flydning i bøjlerne, bliver den lodrette ækvivalente bøjlespænding

$$\sigma_{ya} = \psi f_c \sin^2 \alpha \quad (5.3.3)$$

Der tages nu udgangspunkt i løsningen fra afsnit 5.1.1, hvor forskydningskraften  $P$  i et lodret snit gennem skiven udelukkende er en resultant af forskydningspændinger i betonen. Det tilsvarende bidrag fra betonspændingerne til forskydningsoptagelsen i en skive med skrå bøjler kan nemlig findes som løsningen fra afsnit 5.1.1, ved i randbetingslignelsen langs stringerne at indsatte  $\sigma_{ay}$  bestemt ved (5.3.3) i stedet for den ved (5.1.3) bestemte ækvivalente bøjlespænding. Det nævnte bidrag fra betonspændingerne bestemmes derfor under forudsætning af flydning i bøjlerne som løsninger (5.1.13) og (5.1.19) med overgangsbetingslignelsen (5.1.14) ved i disse udtryk at erstatte  $\psi$  med størrelsen  $\psi \sin^2 \alpha$ .

Ud over bidraget fra betonen vil også de skrå bøjler bidrage til forskydningsoptagelsen, idet den ækvivalente bøjleforstyrkningspænding i et lodret snit er

$$\tau_{xy} = \psi f_c^* \sin \alpha \cos \alpha$$

så bøjlerne til forskydningsoptagelsen bidrager med

$$\Delta P = b h \psi f_c^* \sin \alpha \cos \alpha$$

Lægges bidragene fra beton og forskydningsarmering sammen, og beskrives bæreevnen ved den formelle forskydningssspænding  $\tau$  fra (5.1.12), fås således

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) + \psi \frac{a}{h} \sin^2 \alpha + \psi \sin \alpha \cos \alpha \quad (5.3.4)$$

så lange

$$\frac{a}{h} \leq \frac{1 - 2\psi \sin^2 \alpha}{2\psi \sin^2 \alpha (1 - \psi \sin^2 \alpha)} \quad (5.3.5)$$

Er (5.3.5) ikke opfyldt, erstattes (5.3.4) af

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \sqrt{\psi \sin^2 \alpha (1 - \psi \sin^2 \alpha)} + \psi \sin \alpha \cos \alpha \quad (5.3.6)$$

Den største bæreevne bestemt ved (5.3.6) opnås for

$$\psi = \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$$

hvilket indsat i (5.3.6) giver bæreevnen:

$$\frac{\tau}{f_c^*} = \frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (5.3.7)$$

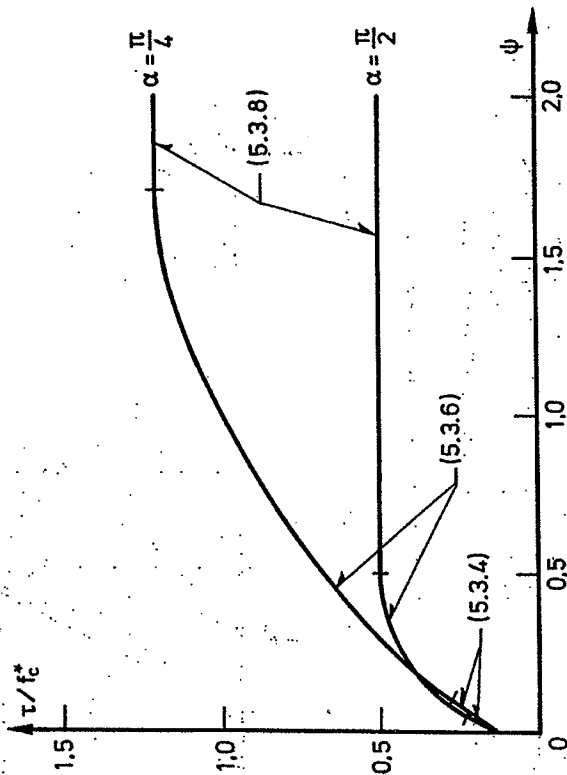
der således bliver den bedste nedrevardi for

$$\psi > \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \quad (5.3.8)$$

svarende til, at der ikke længere opstår flydning i bøjlerne. Af (5.3.5) ses, at når  $\frac{a}{h} \geq 0$ , bliver (5.3.4) aldrig aktuel, hvis betingelsen (5.3.8) er opfyldt.

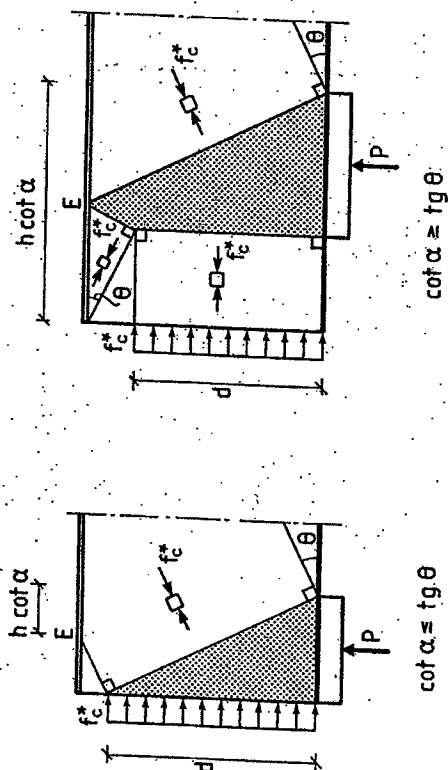
Bæreevnen bestemt som funktion af den mekaniske forskydningsarme-

ringsgrad  $\psi$  er illustreret på figur 5.20 for  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  og  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ved  $\frac{a}{h} = 2$ . Det bemærkes af figuren, at bøjleholdningen  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  kun viser sig fordelagtig ved relativt store værdier af  $\psi$ .



Figur 5.20: Bæreevne som funktion af  $\psi$  ved  $\frac{a}{h} = 2$ .

på figur 5.5 blev der illustreret en spændingsfordeling til sikring af stringernes forankring bag lejet. Også når bøjlerne er skrå, vil en sådan forankring normalt være nødvendig. Eksempelvis kan der svarende til løsningen (5.3.6) opbygges en spændingsfordeling over vederlaget som en af de to på figur 5.21 viste. Det afgøres af bøjleholdningen og holdningen af trykket i bjælkekroppen, hvilken af de to spændingsfordelinger, der er aktuel; men i alle tilfælde ses, at der over en strækning  $d$  i et lodret snit bag lejet virker et tryk af størrelsen  $f_c^*$ . Dette tryk må holdes i ligevegt med stringekræfterne,  $T_0$  og  $C_0$ , helt analogt til det i forbindelse med figur 5.5 gennemgåede.



Figur 5.21: Spændingsforhold over leje.

Ved begge de to viste spændingsfordelinger regnes i de skrårede områder med et toakset hydrostatisk tryk af størrelsen  $f_c^*$ . Når  $\theta$  fortsat betegner betontrykkets hældning i bjælkekroppen svarende til den betragtede nedrevardiløsning, (5.3.6), vil de viste spændingsfordelinger opfylde alle ligevægtsbetingelser og randbetingelser. Den aktuelle værdi af  $\theta$  bestemmes ved

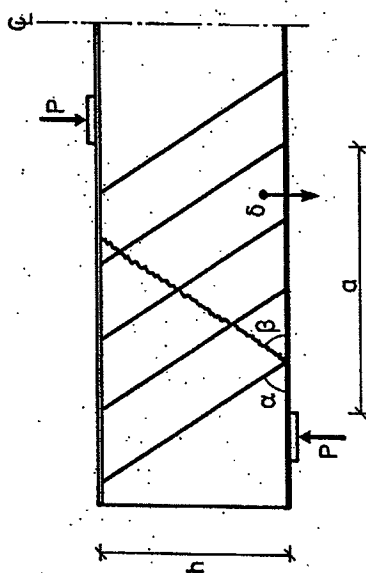
$$\cot \theta = \sqrt{\frac{1 - \psi \sin^2 \alpha}{\psi \sin^2 \alpha}}$$

hvor  $d$  kan beregnes, idet lejet er regnet aktivt over længden  $\frac{1}{f_c^*} \cdot h$ .

### 5.3.2 Øvre vardiløsning

Til udledning af øvre vardiløsningen benyttes samme mekanisme som anvendt i afsnit 5.1.2. Se også figur 5.22.

Når skivens midterdel som vist translateres stykket  $\delta$  lodret nedefter i forhold til skivedelen over understøtningen, bliver



Figur 5.22: Brudmekanisme.

det indre arbejde

$$W_I = \frac{1}{2} \delta b \frac{h}{\sin \beta} (1 - \cos \beta) f_c^* + \delta \sin \alpha b \frac{h \cos \{\beta - (\frac{\pi}{2} - \alpha)\}}{\sin \beta} \psi f_c^* \quad (5.3.9)$$

så længe det er opfyldt, at

$$\beta \leq \pi - \alpha$$

Det ydre arbejde bliver

$$W_E = \delta P$$

så bareevnen bestemmes ved arbejds ligningen til

$$\frac{P}{b h f_c^*} = \frac{1}{f_c^*} = \frac{1}{2} \{ \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta + 2 \psi \sin^2 \alpha (\cot \beta + \cot \alpha) \} \quad (5.3.10)$$

Den mindste værdi af (5.3.10) findes for

$$\cot\beta = \frac{1 - 2\psi \sin^2\alpha}{2\sqrt{\psi \sin^2\alpha(1 - \psi \sin^2\alpha)}} \quad (5.3.11)$$

Denne værdi kan dog ikke anvendes, hvis

$$\frac{a}{h} < \frac{1 - 2\psi \sin^2\alpha}{2\sqrt{\psi \sin^2\alpha(1 - \psi \sin^2\alpha)}} \quad (5.3.12)$$

I så fald findes bæreevnen ved i (5.3.10) at sætte  $\cot\beta = \frac{a}{h}$ , hvilket giver

$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) + \psi \sin^2\alpha \left( \frac{a}{h} + \cot\alpha \right) \quad (5.3.13)$$

Er (5.3.12) ikke opfyldt kan bæreevnen bestemmes ved at indsætte (5.3.11) i (5.3.10), og da fås

$$\frac{T}{F_C} = \sqrt{\psi \sin^2\alpha(1 - \psi \sin^2\alpha)} + \psi \sin\alpha \cos\alpha \quad (5.3.14)$$

Eftersom (5.3.9) kræves opfyldt, kan (5.3.14) ikke benyttes, hvis

$$\cos\beta < -\cos\alpha \quad (5.3.15)$$

Af (5.3.11) fås

$$\cos\beta = 1 - 2\psi \sin^2\alpha$$

så (5.3.15) er ensbetydende med, at

$$\psi > \frac{1 + \cos\alpha}{2\sin^2\alpha} \quad (5.3.16)$$

Når (5.3.16) er opfyldt, må bæreevnen derfor bestemmes ved i (5.3.10) at sætte

$$\cot\beta = -\cot\alpha$$

hvilket leder til

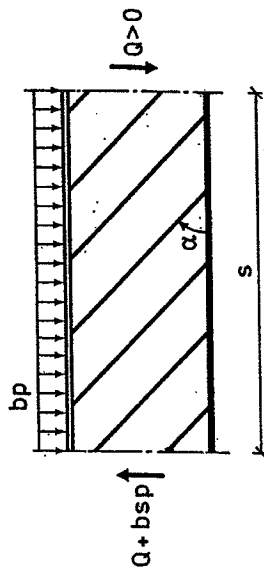
$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (5.3.17)$$

Svarende til (5.3.17) er brudlinien altså parallel med bøjlerne og der opstår ikke flydning i disse.

Ved sammenligning ses, at ovenstående løsning bestemt ved (5.3.13), (5.3.14) og (5.3.17) med de tilhørende betingelser (5.3.12) og (5.3.16) er sammenfaldende med løsningen fra afsnit 5.3.1.

#### 5.4 Jævnt fordelt last, skrå bøjler

Betragt atter skiven med belastning, som blev behandlet i afsnit 5.2, se figur 5.12. Bøjlerne i denne skive tænkes nu stående under vinklen  $\alpha$  med vandret, hvor  $\alpha$  i et afsnit af skiven forudsættes orienteret som vist på figur 5.23, når forskydningskræfterne virker som anført på figuren



Figur 5.23: Skive med skrå bøjler.

Forskydningsarmeringsgraderne, såvel den geometriske som den mekaniske indføres fortsat som i afsnit 5.3, se (5.3.1) og (5.3.2).

#### 5.4.1 Nedreværdiløsning

I det lodrette snit umiddelbart foran understøtningen giver lodret projektlionslignevægt svarende til (5.2.1) for en skive med skrå bøjler

$$bh f_C^* \sin\theta \cos\theta + \psi bh f_C^* \sin\alpha \cos\alpha = pba \quad (5.4.1)$$



medens randbetingelsen (5.2.3) erstattes af

$$f_C^* \sin^2 \theta - \psi f_C^* \sin^2 \alpha = p \quad (5.4.2)$$

Ved løsning af de to ligninger (5.4.1) og (5.4.2) kan bæreevnen findes, og beskrives denne ved den formelle forskydningspænding fra (5.2.6) fås under forudsætning af flydning i bøjlerne:

$$\begin{aligned} \frac{f_C^*}{f_C} &= \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{1 + (\frac{a}{h})^2} \{1 - 2\psi \sin^2 \alpha + 4\psi \frac{a}{h} \sin \alpha \cos \alpha \\ &+ \sqrt{1 + 4(\frac{a}{h})^2 \psi \sin^2 \alpha (1 - \psi \sin^2 \alpha) + 4\psi \sin \alpha \cos \alpha (\frac{a}{h} - \psi \sin \alpha \cos \alpha)}\} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

og trykhældningen,  $\theta$ , kan derefter bestemmes ved

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{h}{a} \frac{f_C^*}{f_C} - \psi \sin^2 \alpha}{\frac{h}{a} \frac{f_C^*}{f_C} + \psi \sin^2 \alpha}} \quad (5.4.4)$$

Løsningen (5.4.3) er kun den optimale for

$$\psi \leq \frac{1}{2} \frac{\frac{a}{h} + \frac{a}{h} \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{a}{h} \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (5.4.5)$$

For større forskydningsarmeringsgrader opstår ikke flydning i bøjlerne, og bæreevnen findes så ved at indsatte grænseværdien i (5.4.5) i (5.4.3), og da findes

$$\frac{f_C^*}{f_C} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{h}}{\frac{a}{h} + \cot \alpha} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.6)$$

Det vil altså sige, at

$$\frac{p}{f_C^*} (\frac{a}{h} + \cot \alpha) = \frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.7)$$

Sammenlign iøvrigt her med (5.3.7).

Løsningen (5.4.6) svarer til, at

$$\cot \theta = \tan \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.8)$$

For korte spændvidder, det vil sige for

$$\frac{a}{h} < \tan \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.9)$$

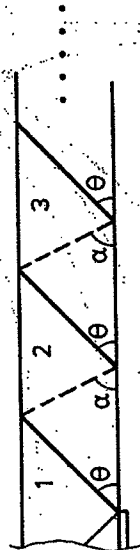
opstår ingen spændinger i bøjlerne, og i så fald bliver bæreevnen

$$\frac{f_C^*}{f_C} = \frac{\frac{a}{h}}{1 + (\frac{a}{h})^2} \quad (5.4.10)$$

svarende til trykhældningen

$$\cot \theta = \frac{a}{h}$$

En mulig og sikker spændingsfordeling ind mod skivemidten, kan for løsningerne (5.4.6) og (5.4.7) fremkomme som en modifikation af spændingsfordelingen fra figur 5.14, se figur 5.24.



Figur 5.24.

De viste parallellogram-formede områder,  $i = (2, 3, \dots)$ , har den vandrette sidelængde  $h(\cot \theta + \cot \alpha)$ . I hvert af disse områder er der snakset tryk i betonen under vinklen  $\theta$  med vandret, et tryk som er

$$\sigma_D^i = f_C^* - (1 - i)p(1 + \cot^2 \theta)$$

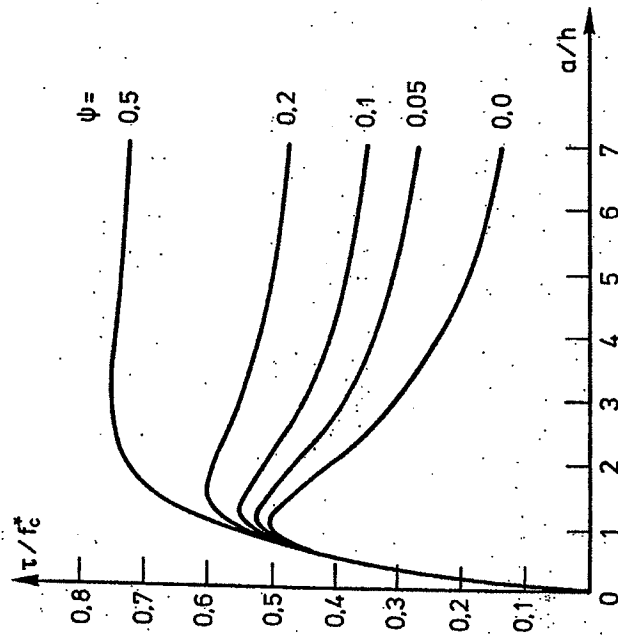
og den lodrette ækvivalente bøjlespænding fra bøjlerne, der skærer skillelinien mellem område i og område i + 1, bliver

$$\sigma_{ay}^i = \sigma_{ay}^1 - (i - 1)p$$

Betegnes normalspændingen i bøjlernes længderetning  $\sigma_a^i$  i de bøjler der krydser skillelinien mellem områderne i og i + 1, fås

$$\sigma_a^i = \sigma_a^1 - (i - 1) \frac{p}{\sin^2 \alpha}$$

Det bemærkes, at der i ovenstående løsning ikke er regnet for spændingsfordelingen over understøtningen, ligesom det også i



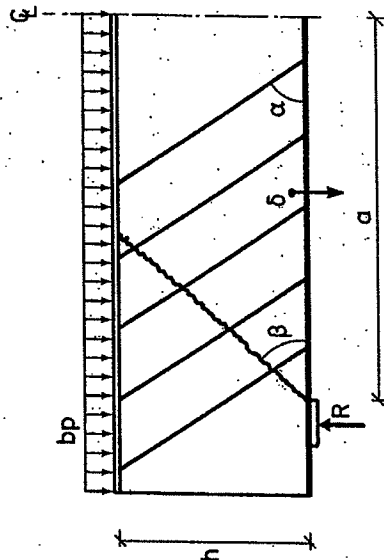
Figur 5.25: Bæreevne som funktion af spændvidde ved  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

almindelighed vil være nødvendigt at modificere spændingsfordelingen fra figur 5.24 i et område nær skivemidten analogt til det i afsnit 5.2.1 gennemgik, se figur 5.15.

På figur 5.25 ses en afbildning af de fundne bæreevner som funktion af spændvidden ved bøjlehalvdningen  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Sammenlignes figur 5.25 med figur 5.16 vil det ses, at ved små armeringsgrader bliver halvdningen  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ikke mere fordelagtig end halvdningen  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  for store spændvidder.

#### 5.4.2 Øvreverdiløsning

Til udledning af en øvreverdiløsning benyttes samme mekanisme som anvendt i afsnit 5.2.1, hvor skivens midterdel bevæges lodret nedad i forhold til skivedelen over understøtningen, se figur 5.26.



Figur 5.26: Brudmekanisme.

Ved mekanismen dannes en brudlinje forløbende under vinklen  $\beta$  med vandret fra understøtningens forkant til skivens øvre rand. Betegnes den relative translation  $\delta$ , bliver det indre arbejde

$$W_I = \frac{1}{2} \delta b \frac{h}{\sin \beta} (1 - \cos \beta) f_c^* + \delta \sin \alpha b \frac{h \cos (\beta - (\frac{\pi}{2} - \alpha))}{\sin \beta} \psi f_c^*$$

hvor det dog kræves, at

$$\beta \leq \pi - \alpha \quad (5.4.11)$$

Det ydre arbejde bliver ved den viste mekanisme:

$$W_E = \delta(a - h \cot \beta) b p$$

så af arbejdsbetingelsen findes bæreevneudtrykket:

$$\frac{p}{h} \frac{a}{f_C} = \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C} \frac{1}{h} \{ \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta + 2\psi \sin^2 \alpha \cot \beta + 2\psi \sin \alpha \cos \alpha \} \quad (5.4.12)$$

Optimeres dette udtryk med hensyn til  $\cot \beta$ , findes

$$\cot \beta = \frac{\chi \sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2 - \chi^2} - \frac{a}{h}}{(\frac{a}{h})^2 - \chi^2} \quad (5.4.13)$$

Hjælpeparameteren  $\chi$  i (5.4.13) er defineret ved

$$\chi = \frac{a}{h} - 2\psi \frac{a}{h} \sin^2 \alpha - 2\psi \sin \alpha \cos \alpha \quad (5.4.14)$$

Indsættes (5.4.13) i (5.4.12) bliver

$$\frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C} \frac{1}{h} \left[ 1 - 2\psi \sin^2 \alpha + 2\psi \frac{a}{h} \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

$$+ \sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{h}\right)^2 \psi \sin^2 \alpha (1 - \psi \sin^2 \alpha) + 4\psi \sin \alpha \cos \alpha \left( (1 - 2\psi \sin^2 \alpha) \frac{a}{h} - \psi \sin \alpha \cos \alpha \right)} \quad (5.4.15)$$

Denne løsning kan kun anvendes så længe  $\beta$  fastlagt ved (5.4.13) opfylder betingelsen (5.4.11), hvilket ved indsættelse findes at være ensbetydende med kravet

$$\psi \leq \frac{1}{2} \frac{\frac{a}{h} \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (5.4.16)$$

Er betingelsen (5.4.16) ikke opfyldt fås ved at indsætte

$$\cot \beta = - \cot \alpha$$

i (5.4.12) bæreevnen

$$\frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C} \frac{1}{h} \frac{a}{h} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.17)$$

For korte spændvidder, det vil sige for

$$\frac{a}{h} \leq \tan \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.18)$$

eksisterer en bedre øvregrænse end givet ved (5.4.17), såfremt der ikke udgår nogen bøjler fra trækstringen bag lejets forkant. Da erstattes (5.2.12) med

$$\frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C} \frac{1}{h} \frac{a}{h} \{ \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \cot \beta \} \quad (5.4.19)$$

der kræver, at

$$\beta \geq \pi - \alpha \quad (5.4.20)$$

I så fald findes optimum for

$$\cot \beta = \frac{a^2 - h^2}{2ah} \quad (5.4.21)$$

der indsæt i (5.4.19) giver

$$\frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_C} \frac{1}{h} \frac{a}{h} \frac{1}{1 + (\frac{a}{h})^2} \quad (5.4.22)$$

Indsættes (5.4.21) i (5.4.20), fås netop overgangsbetingelsen (5.4.18).

Den her gennemgængede øvregrænse er sammenfaldende med løsningen fra afsnit 5.4.1.

## 6. INDFLYDELSE FRA BETONENS TRÆKSTYRKE

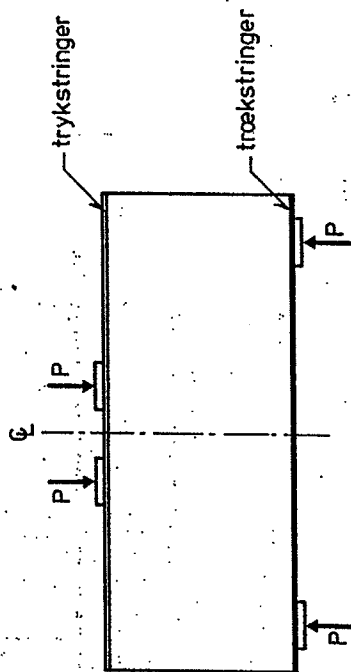
I skiver forsynet med forskydningsarmering, vil betonen i skivekroppen være gennemrevnet ved en last adskilligt lavere end brudlasten. Det må derfor formodes, at betonen ikke kan tillægges nogen væsentlig trækstyrke ved brudstadiereberegningen.

Her gennegås derfor kun et eksempel med en skive uden forskydningsarmering, idet revnedannelsen i en sådan skive gerne er mindre udtalt, således at betonen med rimelighed kan regnes i besiddelse af en vis, omend lille, trækstyrke.

Ved den efterfølgende beregning anvendes for betonen brudbetingelsen som skitseret på figur 2.2 ved plan spændingstilstand. Der henvises iøvrigt også til afsnit 3.2.

## 6.1 Skive med koncentreret last

Der betragtes en simpelt understøttet skive angræbet af to symmetrisk placerede enkeltkræfter som vist på figur 6.1.



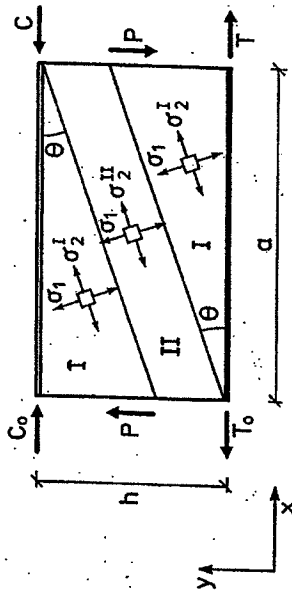
Figur 6.1: Skive med koncentreret last.

Såvel skivens trykzone som langdearmeringen idealiseres som stringere. Disse stringere antages at være tilstrækkelig stærke til at kunne modstå de opstående stringerkræfter, således at skivens bæreevne udelukkende betinges af kroppens evne til forskydningsoptagelse.

### 6.1.1 Nedreværdiløsning

Der redegøres i dette afsnit ikke for forholdene over lejet og under lastpladen. Således betragtes kun skiveafsnittet mellem lastplade og understøtning, idet nabolene af skiven antages at kunne optage den ved løsningen bestemte fordeling af spændinger i de lodrette snit ved leje og lastplade.

I første omgang anvendes spændingsfordelingen vist på figur 6.2. I områderne betegnet I er spændingerne:



Figur 6.2: Spændingsfordeling ved korte spændvidder.

$$\sigma_x^I = \sigma_2^I \cos^2 \theta + \sigma_1^I \sin^2 \theta \quad (6.1.1)$$

$$\sigma_y^I = \sigma_1^I \cos^2 \theta + \sigma_2^I \sin^2 \theta \quad (6.1.2)$$

$$|\tau_{xy}^I| = |\sigma_1^I - \sigma_2^I| \sin \theta \cos \theta \quad (6.1.3)$$

I disse områder kræves langs stringerne, at

$$\sigma_y = 0 \quad (6.1.4)$$

som indsat i (6.1.2) giver

$$\sigma_2^I = -\sigma_1^I \cot^2 \theta \quad (6.1.5)$$

og derefter findes af (6.1.3), når  $\sigma_1 \geq 0$ :

$$|\tau_{xy}^I| = \sigma_1^I \cot \theta \quad (6.1.6)$$

I område II er

$$|\tau_{xy}^{II}| = |\sigma_1^I - \sigma_2^{II}| \sin \theta \cos \theta \quad (6.1.7)$$

og brud i betonen svarer til, at

$$\sigma_2^{II} = k \sigma_1^I - f_c^* \quad (6.1.8)$$

Indsat i (6.1.7) giver dette

$$|\tau_{xy}^{II}| = (\sigma_1^I - k \sigma_1^I + f_c^*) \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \quad (6.1.9)$$

Forskydningskraften, der kan optages, kan skrives

$$P = |\tau_{xy}^I| b a \tan \theta + |\tau_{xy}^{II}| b (h - a \tan \theta) \quad (6.1.10)$$

Heraf fås med brug af (6.1.6) og (6.1.9)

$$\tau = \sigma_1^I \frac{a}{h} + (f_c^* - k \sigma_1^I + \sigma_1^I) \frac{\cot \theta - \frac{a}{h}}{1 + \cot^2 \theta} \quad (6.1.11)$$

hvor  $\tau$  er den formelle forskydningspænding:

$$\tau = \frac{P}{bh} \quad (6.1.12)$$

Den bedste nedrevardi bestemt ved (6.1.11) opnås for

$$\cot \theta = \frac{a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}$$

som indsat i (6.1.11) giver

$$\tau = \frac{a}{h} \sigma_1^I + \frac{1}{2} (f_c^* - k \sigma_1^I + \sigma_1^I) \left( \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} - \frac{a}{h} \right) \quad (6.1.13)$$

Den største bæreevne givet ved (6.1.13) findes for

$$\sigma_1^I = f_c^* = \rho f_c^* \quad , \quad \frac{a}{h} \geq \frac{k-1}{2k} = \tan \varphi$$

$$\sigma_1^I = 0 \quad , \quad \frac{a}{h} \leq \frac{k-1}{2k} = \tan \varphi$$

Derved fås

$$\frac{\tau}{\tau_{\text{exp}}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2} - \frac{\beta}{\beta_0} \right), \quad \frac{\beta}{\beta_0} \leq \text{tg} \varphi \quad (6.1.14)$$

$$\frac{\tau}{\hbar^2} = \frac{1}{2}(\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\Omega}\right)^2} - \mu \frac{a}{\Omega}) \quad , \quad \frac{a}{\Omega} \geq \operatorname{tg} \varphi \quad (6.1.15)$$

hvor parametrene  $\lambda$  og  $\mu$  er

$$\lambda = 1 - o(k-1)$$

$$u = 1 - o(k+1)$$

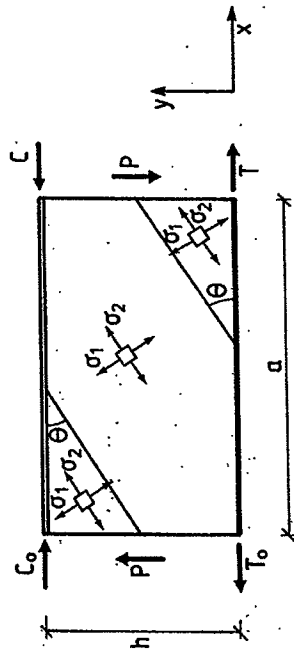
Løsningen (6.1.15) kan kun benyttes så længe

250  
H  
^  
X  
F\*  
-  
F\*  
C

I er bestemt ved (6.1.5) ses dette at svare til, at

$$\frac{\alpha}{\alpha} \leq \frac{1 - k\rho - \rho}{2\sqrt{\rho(1 - k\rho)}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \quad (6.1.18)$$

Er dette ikke opfyldt, andres spændingsfordelingen fra figur 6.2 vil den på figur 6.3 viste homogene spændingsfordeling i forskydningsfaget.



Figur 6.3: Spændingsfordeling ved store spændvidder.

**Spændingerne bliver nu i hele skivekroppen:**

$$\sigma_{\perp} = \sigma_0 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta$$

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (6.1.20)$$

$$|\tau_{xy}| = |\sigma_1 - \sigma_2| \cos \theta \sin \theta \quad (6.1.21)$$

**Hér sættes**

$$J_2' = k \sigma_1 - f_2^* \quad (6.1.22)$$

svarende til brud i betonen. Randbetingelsen (6.1.4) kræves stadig opfyldt, så af (6.1.20) fås med (6.1.22) indsat

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{F_c^* - k \sigma_1}{\sigma_1}} \quad (6.1.23)$$

Derefter findes bæreoven af

$$P = bh|\tau_{xy}|$$

sa (6.1.23) og (6.1.22) indsat i (6.1.21) giver bæreoven udtrykt

$$\tau = \sqrt{\sigma_1(f_c^* - k \sigma_1)}$$

Den største bæreevne opnås her for

$$\sigma_1 = f_1^* = \rho f_0^*, \quad \text{når } \rho \leq \frac{1}{2k}$$

$$\sigma_1 = \frac{f^*}{2k}, \quad \text{нар } \rho \geq \frac{1}{2k}$$

Indsættes dette i (6.1.24), findes:

$$\frac{\tau}{f^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}, \quad \frac{a}{h} > \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}, \quad \rho \leq \frac{1}{2k} \quad (6.1.25)$$

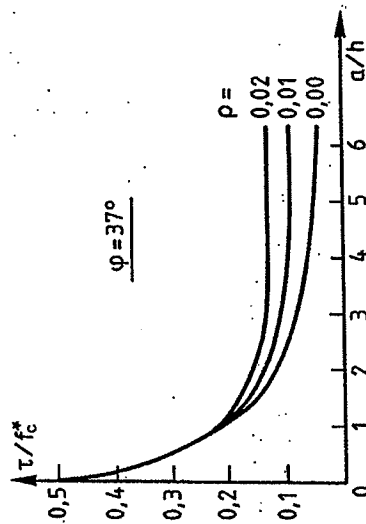
$$\frac{\tau}{T^*} = \frac{1}{2} \quad , \quad \rho > \frac{1}{2k} \quad (5.1.26)$$

hvor det benyttes, at

$$\sqrt{\rho(1-\rho)} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$$

Af grænserne for  $\frac{a}{h}$  i (6.1.26) og (6.1.14), ses, at (6.1.15) aldrig bliver aktuel for  $\rho > \frac{1}{2K}$ . Når  $\rho$  bliver så stor, kan (6.1.18) nemlig ikke opfyldes samtidig med betingelsen  $\frac{a}{h} \geq \tan \varphi$  i (6.1.15). Se oversigten over bæreevneformlerne, figur 6.6.

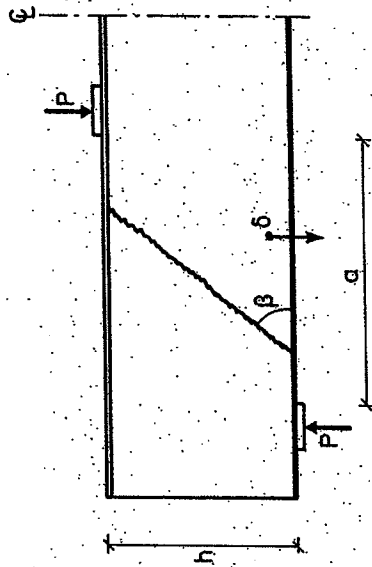
De fundne løsninger ses afbildet grafisk på figur 6.4. Sammenlignes denne figur med figur 5.7, bemærkes hvorledes trækstyrkens indflydelse på bæreevnen er analog til effekten opnået ved at forsyne skivekroppen med forskydningsarmering.



Figur 6.4: Bæreevne som funktion af spændvidde.

#### 6.1.2 Øvre værdiløsning

Ved brudmekanismen illustreret på figur 6.5, dannes en ret brudlinie under vinklen  $\beta$  med vandret gennem skivekroppen, idet skivens midterdel bevæges stykket  $\delta$  lodret nedad i forhold til skivedelen over understøtningen.



Figur 6.5: Brudmekanisme.

Jævnfør (3.2.1) bliver det indre arbejde

$$W_I = \frac{1}{2} \delta b \frac{h}{\sin \beta} (\lambda - \mu \cos \beta)$$

såfremt

$$\cot \beta \geq \tan \varphi$$

medens det ydre arbejde er

$$W_E = \delta P$$

Af arbejdsaligningen findes så bæreevneudtrykket

$$\frac{P}{b h f_c^*} = \frac{1}{2} (\lambda \sqrt{1 + \cot^2 \beta} - \mu \cot \beta) \quad (6.1.28)$$

Minimum af dette udtryk fås for

$$\cot \beta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \quad (6.1.29)$$

som indsat i (6.1.28) giver bæreevnen

$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \quad (6.1.30)$$

For at sikre en geometrisk mulig brudfigur, må det dog om  $\cot\beta$  bestemt ved (6.1.29) kræves, at

$$\cot\beta \leq \frac{a}{h}$$

så for

$$\frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \quad (6.1.31)$$

fås bæreevnen ved at sætte

$$\cot\beta = \frac{a}{h}$$

i udtrykket (6.1.28), hvilket giver:

$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} (\lambda \sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \mu \frac{a}{h}) \quad (6.1.32)$$

Såfremt

$$\frac{a}{h} \leq \operatorname{tg}\varphi \quad (6.1.33)$$

er kravet (6.1.27) ikke opfyldt, og da erstattes dissipationsudtrykket (3.2.1) med (3.2.2), således at bæreevneudtrykket (6.1.32) ændres til det fra (4.1.55) kendte:

$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h}) \quad (6.1.34)$$

Tilsvarende ses ved at indsatte (6.1.29) i (6.1.27), at løsnin-gen (6.1.30) kun kan benyttes for

$$\rho \leq \frac{1}{2} k \quad (6.1.35)$$

Er (6.1.35) ikke opfyldt, findes bæreevnen ved i (6.1.30) at sætte

$$\rho = \frac{1}{2} k$$

hvilket giver

$$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2 \sqrt{k}} \quad (6.1.36)$$

svarende til

$$\cot\beta = \operatorname{tg}\varphi$$

Det bemærkes, at den gennemgængede øvreverdiløsning er sammenfal-dende med løsningen fra afsnit 6.1.1. De udløste løsninger er på figur 6.6 opskrevet på oversigtsform.

	$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h})$	$\frac{a}{h} \leq \operatorname{tg}\varphi$
$\rho \leq \frac{1}{2} k$	$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} (\lambda \sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \mu \frac{a}{h})$	$\operatorname{tg}\varphi \leq \frac{a}{h} \leq \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$
	$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \leq \frac{a}{h}$
$\rho \geq \frac{1}{2} k$	$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + (\frac{a}{h})^2} - \frac{a}{h})$	$\frac{a}{h} \leq \operatorname{tg}\varphi$
	$\frac{T}{F_C} = \frac{1}{2 \sqrt{k}}$	$\operatorname{tg}\varphi \leq \frac{a}{h}$

Figur 6.6: Sammenfatning af bæreevneformler.



## 7. SAMMENLIGNING MED FORSØG

Sammenligningen mellem de teoretiske løsninger og forsøg koncentrerer sig i det følgende om forsøg med jernbetonbjælker, og omfatter hovedsagelig forsøg, der allerede i [78.1] og [79.1] er bearbejdet i sammenhæng med teorien.

### 7.1 Betonens effektive styrke

Det er indres, at der til grund for de uledte løsninger lå en ganske drastisk idealisering af betonens egenskaber, se afsnit 2.2. I virkeligheden er betonen ikke som antaget et stift, idealt plastisk materiale. De elastiske deformationer er i brudtilstanden af samme størrelsesorden som de plastiske, og betragtes arbejdskurven for en betoncylinder, ses, at bæreevnen falder føleligt, når deformationerne øges ud over, hvad der svarer til arbejdskurvens toppunkt, som bestemmer cylindertrykstyrken.

Netop samspillet mellem tøjningssvækkelsen og de elastiske deformationers størrelse er i [79.2] taget op til behandling af H. Exner, som ved energibetrægninger når frem til, at betontrykket i middel over en større indre flade i en konstruktion som følge af deformationsegenskaberne kun undtagelsesvis kan nå op på cylinderstyrken. Til brug ved beregninger baseret på antagelsen om ideal plasticitet kan cylinderstyrken,  $f_c$ , således ikke generelt anvendes som mål for den aktuelle betonstyrke i konstruktionen. I stedet må denne styrke, den effektive betonstyrke  $f_c^*$ , fastsættes ved sammenligning af de teoretiske løsninger med forsøg.

En mulig måde at udtrykke den effektive styrke på er gennem formen

$$f_c^* = v f_c \quad (7.1.1)$$

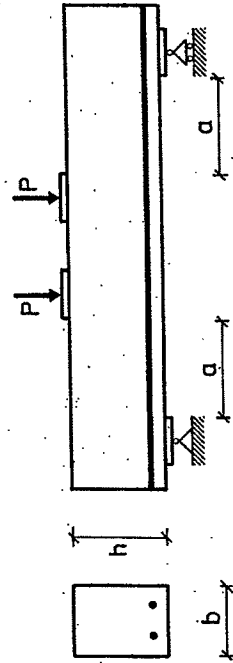
hvor  $v$  kaldes effektivitetsfaktoren, som altså bliver en empirisk bestemt størrelse. Dette princip introduceredes i [67.1] af M. P. Nielsen.

Også andre faktorer end betonens tøjningssvækkelse har antagelig indflydelse på den empirisk bestemte størrelse af  $v$ . Opmærksom-

heden kan eksempelvis henledes på idealiseringen af trykzone og hovedarmering som stringere, den negligerede betontrækstyrke samt forudsætningen om plan spændingstilstand, der ikke kan forventes opfyldt omkring den indstøbte armering.

### 7.2 Bjælker uden forskydningsarmering

I [79.1] har M. Roikjær efter et litteraturstudium bearbejdet resultaterne fra 186 rapporterede forskydningsforsøg med rektangulære, slapt armerede jernbetonbjælker uden forskydningsarmering.



Figur 7.1.

De rapporterede forsøg er alle udført i opstillinger som den på figur 7.1 skitserede. Resultaterne er i [79.1] sammenlignet med bæreevneformlen (4.1.17), idet forsøgene er udvalgt således, at

$$\frac{A_{st} f_{yk}}{b h v_E f_c} \geq \frac{1}{2} \quad (7.2.1)$$

i alle tilfælde. Betegnes den ved et forsøg observerede bæreevne  $P_E$ , bestemmes heraf den formelle forskydningssspænding:

$$\tau_E = \frac{P_E}{b h} \quad (7.2.2)$$

Af (4.1.17) bestemmes effektivitetsfaktoren derefter ved:

$$v_E = \frac{\tau_E}{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{f_c}{h} \right)^2} - \frac{f_c}{h} \right) f_c} \quad (7.2.3)$$

hvor  $f_c$  er den rapporterede cylindertrykstyrke.

Under sin gennemgang af forsøgsmaterialet finder M. Rølkjær, at de ved (7.2.3) bestemte  $v_E$ -værdier i væsentlig grad afhænger af den målte cylinderstyrke, den absolutte størrelse af prøvelegemet, den geometriske længdearmingsgrad og forskydningspændviddeforholdet. Disse afhængigheder kan eksempelvis beskrives på formen:

$$v = g_1(f_c) g_2(h) g_3(\varphi_{al}) g_4\left(\frac{a}{h}\right) \quad (7.2.4)$$

Gennem en statistisk analyse af de omtalte 186 forsøg, fastsættes funktionerne fra (7.2.4) i [79.1] til

$$g_1(f_c) = \frac{3,5}{\sqrt{f_c}} \quad , \quad f_c \text{ i MPa, } 5 \text{ MPa} < f_c < 60 \text{ MPa} \quad (7.2.5)$$

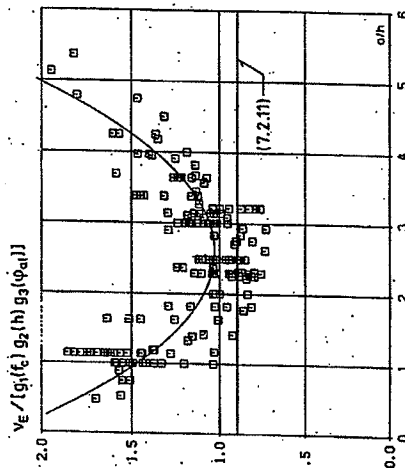
$$g_2(h) = 0,27\left(1 + \frac{1}{\sqrt{h}}\right) \quad , \quad h \text{ i m, } 0,08 \text{ m} < h < 0,7 \text{ m} \quad (7.2.6)$$

$$g_3(\varphi_{al}) = 0,15 \varphi_{al} + 0,58 \quad , \quad \varphi_{al} \text{ i } \% \quad , \quad \varphi_{al} < 4,5\% \quad (7.2.7)$$

$$g_4\left(\frac{a}{h}\right) = 1 + 0,17\left(\frac{a}{h} - 2,6\right)^2 \quad , \quad \frac{a}{h} < 5,5 \quad (7.2.8)$$

Middelværdien af forholdet mellem de eksperimentelt bestemte  $v_E$ -værdier og de ved (7.2.4) bestemte  $v$ -værdier bliver for de 186 forsøg 1,00 med en variationskoefficient på 14,5%. Funktionen  $g_1(f_c)$  afspejler den relative forkortelse af betonens arbejds-kurve ved voksende trykstyrke,  $g_2(h)$  udtrykker en skalaeffekt og en  $g_3(\varphi_{al})$  afspejler antagelig både armeringens dornvirkning og en betydning af de mindre deformationer, der følger med stigende værdier af  $\varphi_{al}$ . Endelig ses funktionen  $g_4\left(\frac{a}{h}\right)$  at udtrykke faldende værdier af  $v$ , når  $\frac{a}{h}$  vokser op til 2,6, og atter stigende værdier af  $v$ , når  $\frac{a}{h}$  vokser yderligere. Førstnævnte relation mellem  $v$  og  $\frac{a}{h}$  kan skyldes, at armeringens dornvirkning er af væsentligst betydning ved små spændvidder, medens de stigende  $v$ -værdier for  $\frac{a}{h}$  voksende ud over 2,6 givet bunden i den negligerede betontrækstyrke, se figur 6.4.

På figur 7.2 er de ved (7.2.3) bestemte  $v_E$ -værdier fra de 186 analyserede forsøg afbildet som funktion af  $\frac{a}{h}$ -forholdet, idet afhængighederne af de øvrige parametre,  $f_c$ ,  $h$  og  $\varphi_{al}$  er bortdivideret. Figuren er aftrykt fra [79.1].



Figur 7.2: Effektivitetsfaktorens afhængighed af  $\frac{a}{h}$ . Slagt armerede bjælker.

Også forsøg med rektangulære, forspændte jernbetonbjælker uden forskydningsarmering er behandlet i [79.1]. På basis heraf kan konstateres en gunstig effekt fra forspændingen, samt at disse forsøg ikke indicerer nogen afhængighed af  $v$  med  $\frac{a}{h}$  for forspændte bjælker, og svarende til 7.2.4 foreslås en empirisk formel for  $v$ , som lyder:

$$v = g_1(f_c) g_2(h) g_3(\varphi_{al}) g_5\left(\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{0,2}}\right) \quad (7.2.9)$$

hvor  $g_1(f_c)$ ,  $g_2(h)$  og  $g_3(\varphi_{al})$  er de samme funktioner som indgik i (7.2.4), medens den sidste funktion er

$$g_5\left(\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{0,2}}\right) = 1,1(1 + 0,81 \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{0,2}}) \quad (7.2.10)$$

Her betegner  $\sigma_{\text{eff}}$  armeringens effektive forspænding og  $\sigma_{0,2}$  flydespændingen. Materialet bag formel (7.2.9) omfattede 19 forsøg, og middelværdien på forholdet mellem  $v$  bestemt ved (7.2.9) og  $v_E$  bestemt ved (7.2.3) er for de 19 forsøg 1,00 med en variationskoefficient på 8,6%.

Det bemærkes, at formel (7.2.9) ikke stemmer overens med formel (7.2.4), når forspændingen forsvinder, antagelig en følge af det begrænsede forsøgsmateriale, der ligger til grund for (7.2.9). Generelt må det på basis af de fundne afhængigheder, (7.2.4) og (7.2.9), erkendes, at den teoretiske model ikke muliggør en fyldestgørende beskrivelse af de betragtede bjælkers brudtadeforhold. Det kan ganske vist anføres, at armeringsplacering og lejevidde ved forsøgene ikke var nøje afpasset efter formel (4.1.16), der er et krav for anvendelse af (4.1.17). Studeres dette nærmere, viser det sig dog, at med de lejevidder og dæklagstykkelser, der anvendes ved forsøgene, bliver den teoretiske bæreevnereduktion i forhold til (4.1.17) ikke af en størrelse, der kan give forventning om principielle ændringer i (7.2.4) og (7.2.9). Bemærk for eksempel de flade maxima på figur 4.5.

På trods af ovenstående konklusion, vil løsningerne fra afsnit 4.1 alligevel kunne finde praktisk anvendelse under forudsætning af en tilpas konservativ fastlæggelse af effektivitetsfaktoren. Det foreslås her, at erstatte funktionen  $g_4(\frac{a}{h})$  fra (7.2.8) med

$$g_4(\frac{a}{h}) = 0,9 \quad (7.2.11)$$

Se denne funktion indtegnet på figur 7.2 sammenholdt med forsøgsresultaterne.

For de forspændte bjælkers vedkommande, anføres i [79.1], at faktoren 1,1 i funktionen  $g_5(\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{0,2}})$  fra (7.2.9) kan betragtes som en erstatning for funktionen  $g_4(\frac{a}{h})$  anvendt ved de slapt armerede bjælker. For at opnå sammenhang mellem de to bjælketyper foreslås (7.2.10) derfor erstattet af

$$g_5(\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{0,2}}) = 0,9(1 + 0,81 \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{0,2}}) \quad (7.2.12)$$

ved praktiske anvendelser. Alt i alt bestemmes  $v$  således på den sikre side ved

$$v = 0,9 \frac{3,5}{\sqrt{F_c}} 0,27(1 + \frac{1}{\sqrt{h}})(0,58 + 0,15 \varphi_{al})(1 + 0,81 \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{0,2}})$$

der kan reduceres til

$$v = \frac{0,49}{\sqrt{F_c}}(1 + \frac{1}{\sqrt{h}})(1 + 0,26 \varphi_{al})(1 + 0,81 \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_{0,2}}) \quad (7.2.13)$$

hvor enheder og tilladte grænser fremgår af (7.2.5)-(7.2.7).

I litteraturen findes også rapporteret en del forsøg med rektangulære, slapt armerede bjælker underlagt jævnt fordelt belastning. Beregnes den teoretiske bæreevne her ved (4.2.7), og udvælges kun forsøg, hvor (7.2.1) er sikret opfyldt, findes svarende til (7.2.3):

$$v_E = \tau_E \frac{2a^2 + h^2}{ah} \quad (7.2.14)$$

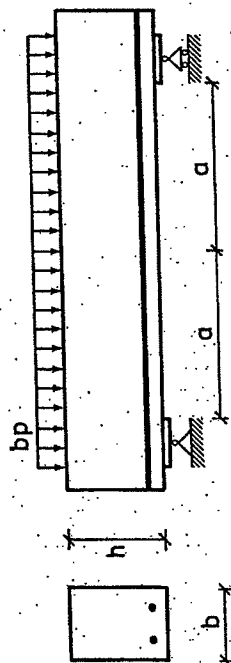
Her er

$$\tau_E = \frac{P_E a}{h} \quad (7.2.15)$$

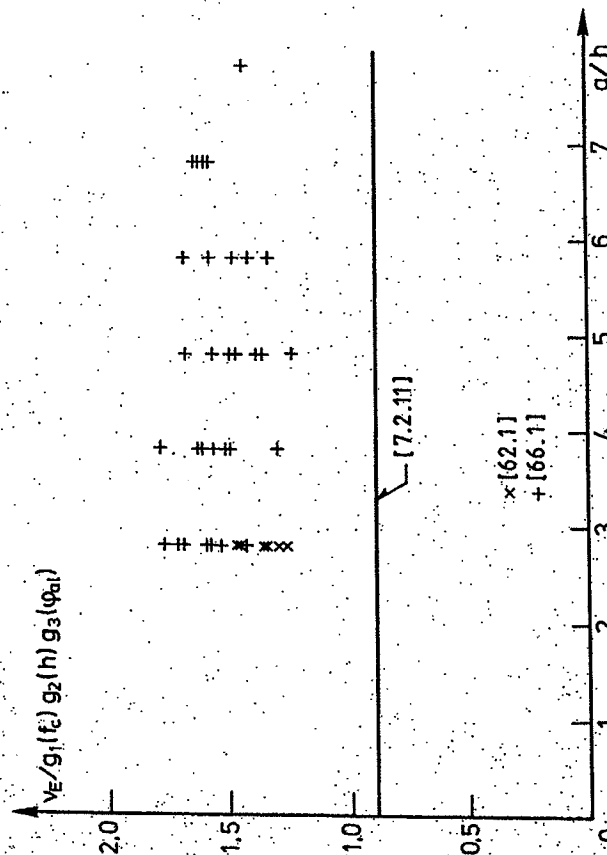
hvor  $P_E$  er den observerede brudlast omregnet til en jævnt fordelt spænding på bjælkens overside.

De af (7.2.14) bestemte værdier af  $v_E$  er afbildet på figur 7.4 som funktion af  $\frac{a}{h}$ , svarende til afbildningen fra figur 7.2, idet funktionerne  $g_1(\frac{a}{h})$ ,  $g_2(h)$  og  $g_3(\varphi_{al})$  fortsat bestemmes ved (7.2.5)-(7.2.7). På figur 7.4 ses desuden funktionen  $g_4(\frac{a}{h})$  fra (7.2.11) indtegnet, og denne fremgår at være klart på den sikre side, således at (7.2.13) ved jævn belastning på slapt armerede bjælker leder til konservative værdier af effektivitetsfaktoren. Dette på trods af, at der som ved bjælkerne med koncentreret last ikke ved forsøgene er foretaget afpasning af lejevidde og armeringsplacering i overensstemmelse med nedreverdiløsningen.

Der savnes endnu eksperimentel verifikation af (7.2.13) for jævn belastning på forspændte bjælker, og endvidere er der som følge



Figur 7.3.

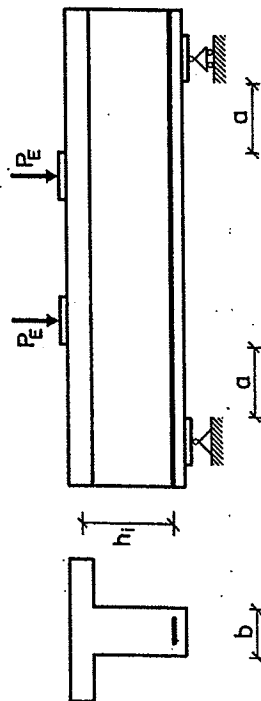


Figur 7.4: Forsøg med jævn belastning.

af manglende sammenligning med forsøg endnu ikke belæg for anvendelse af resultaterne fra afsnit 4.3 for bjælker med central normalkraft.

### 7.3 Bjælker med forskydningsarmring

På Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, er der i årene 1967-1975 udført en lang række forskydningsforsøg med T-bjælker, se figur 7.5.



Figur 7.5.

I [78.1] er de omtalte forsøg sammen med en række andre forsøg fra litteraturen sammenlignet med resultaterne fra afsnit 5.1, idet der i første omgang kun er tale om bjælker med lodrette bøjler. På basis heraf foreslås effektivitetsfaktoren ved forskydningsarmerede bjælker i [78.1] bestemt ved

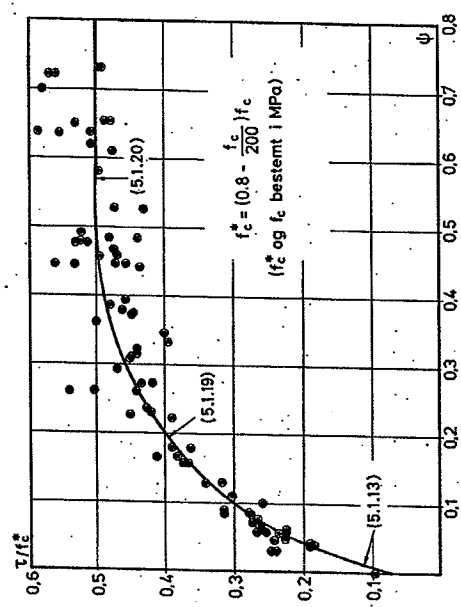
$$v = 0,8 - \frac{f_c}{200} \quad , \quad f_c \text{ i MPa, } 9 \text{ MPa} < f_c < 52 \text{ MPa} \quad (7.3.1)$$

som en passende middelværdi.

Med  $v$  bestemt ved (7.3.1) er resultaterne af forsøgene fra Afdelingen for Bærende Konstruktioner afbildet på figur 7.6. På figuren er løsningen fra afsnit 5.1.1 og 5.1.2 også indtegnet, og det ses, at der er opnået god overensstemmelse mellem teori og forsøg. Ved afbildningen er  $\tau_E$  bestemt ved

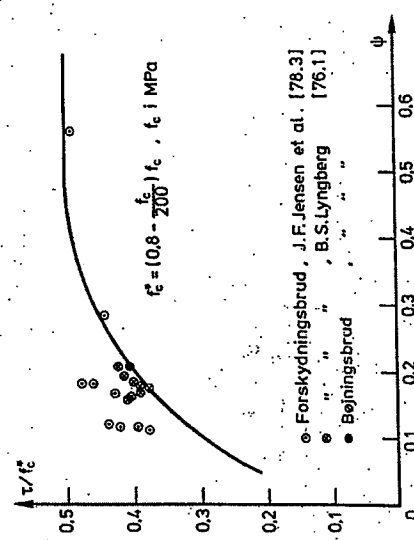
$$\tau_E = \frac{P_E}{b h_1} \quad (7.3.2)$$

hvor  $h_1$  er den indre momentarm og  $P_E$  den observerede brudlast.



Figur 7.6: Forsøg fra [67.2], [71.2], [76.3], [80.2].

Figur 7.6 omfatter kun forsøg med slapt armerede bjælker. I [76.1] og [78.3] er rapporteret nogle forsøg med forspændte I-bjælker, og

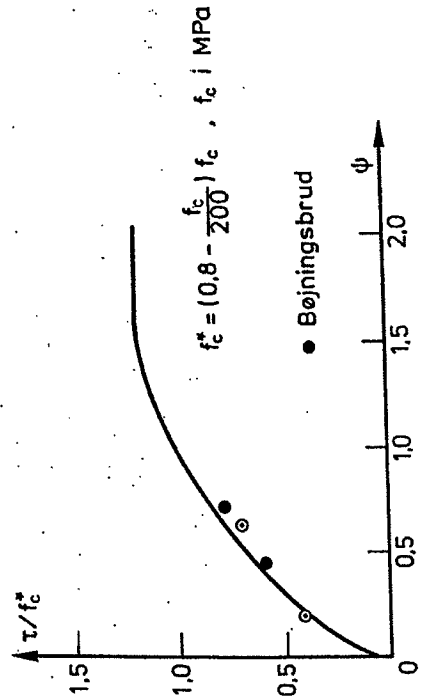


Figur 7.7: Forsøg med forspændte bjælker.

resultaterne fra disse forsøg er afbildet på figur 7.7. Forsøgene fra [78.3] udførtes alle med samme hovedarmeringsarrangement, medens dette varieredes ved forsøgene fra [76.1] således, at forholdet mellem forspændt og ikke-forspændt armering andredes fra forsøg til forsøg. Ifølge figur 7.6 synes den teoretiske model at undervurdere bæreevnen ved de lavere armeringsgrader, hvilket muligvis hænger sammen med de relativt kraftige flanger, der optræder ved I-bjælkerne.

Iøvrigt synes dog bestemmelsen af  $\nu$  på formen (7.3.1) også at være anvendelig ved forspændte, forskydningsarmerede bjælker.

I [80.2] findes refereret nogle få forsøg med koncentreret last på slapt armerede T-bjælker forsynet med skrå bøjler under hældningen  $45^\circ$  med vandret. Forsøgsmaterialet er begrænset, men formel (7.3.1) synes ligeledes her at være brugelig, jævnfør figur 7.8 med den indtegnede bæreevnekurve bestemt ved resultaterne fra afsnit 5.3.1 og 5.3.2.



Figur 7.8: Forsøg med skrå bøjler,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , [80.2].

Vurderet efter forsøgsresultaterne virker den teoretiske model alt i alt velegnet til behandling af forskydningsarmerede jernbetonbjælker, når effektivitetsfaktoren bestemmes ved (7.3.1). Til praktiske anvendelser foreslås dog i [78.1] at erstatte denne bestemmelse med

$$\nu = 0,7 - \frac{f_c}{200}, \quad f_c \text{ i MPa}, \quad 9 \text{ MPa} < f_c < 52 \text{ MPa} \quad (7.3.3)$$

for at opnå værdier på den sikre side.

Det noteres her, at trykzone og hovedarmering aldrig er ideelle stringere beliggende helt i toppen henholdsvis bunden af bjælken. Dette giver anledning til overgangsproblemer fra bjælkerne helt uden forskydningsarmering, hvor bjælkens totalhøjde er afgørende for forskydningskapaciteten, til de relativt kraftigt forskydningsarmerede bjælker, hvor den indre momentarm er eneafgørende. Med  $\nu$  bestemt ved (7.3.2) må resultatet fra forsøget med bjælken helt uden forskydningsarmering derfor tages med et vist forbehold ved den på figur 7.6 viste afbildning. Yderligere erindres resultaterne fra afsnit 7.2, hvor det anbefalede at bestemme effektivitetsfaktoren ved formel (7.2.13) for bjælker uden forskydningsarmering. Denne formel adskiller sig i væsentlig grad fra (7.3.3), gældende for forskydningsarmerede bjælker. Da der ikke er redegjort for overgangsforholdene mellem de to bjælketyper, foreslås her, at kræve bjælken ilagt en vis, minimal forskydningsarmeringsmængde som forudsætning for at tillade (7.3.3) anvendt. Denne minimumsarmering kan eksempelvis foreskrives i henhold til betonnormen DS 411 [73.3], men dette er kun et mere traditionsbestemt skøn.

## 8. ANVENDELSER

Da der i kapitel 7 kun er sammenlignet med forsøg med jernbetonbjælker, bør anvendelserne endnu begrænses til denne type af konstruktionselementer.

### 8.1 Bjælker uden forskydningsarmering.

Forsøgene blev i afsnit 7.2 for bjælker med koncentreret last sammenlignet med løsningen (4.1.17) for den optimale placering af længdearmeringen, jvf. kapitel 4. Svarende til denne løsning bliver momentet i bjælkemidten mindst muligt, når lejevidde og armeringsplacering bestemmes ved de samholdende udtryk (4.1.20) og (4.1.21). Indsættes disse udtryk i (4.1.39) findes

$$T = C = \frac{1}{2} b h f_c^* \quad (8.1.1)$$

således, at trykzonehøjden ved bjælkemidte er  $\frac{1}{2} h$ . Følgelig bliver momentet ved bjælkemidte

$$M = \frac{1}{4} b h^2 f_c^*, \quad \phi \geq \frac{1}{2} \quad (8.1.2)$$

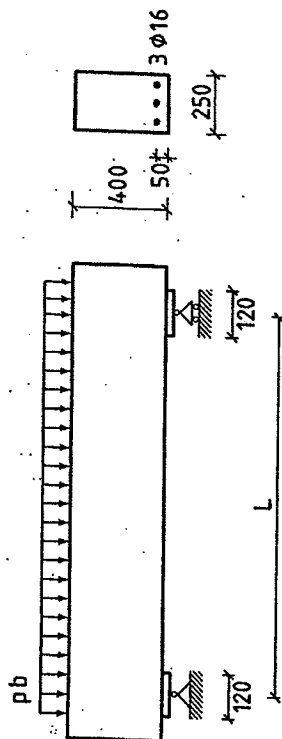
Såfremt armeringen ikke er i stand til at optage kraften (8.1.1), erstattes løsningen (4.1.17) af (4.1.49). Svarende hertil findes det mindst mulige moment i bjælkemidten, når lejevidde og armeringsplacering bestemmes ved (4.1.52) og (4.1.53), og nu bliver

$$T = C = \phi b h f_c^* \quad (8.1.3)$$

I bjælkemidten er trykzonehøjden derfor  $\phi h$ , så momentet samme sted bliver

$$M = \phi (1 - \phi) b h^2 f_c^*, \quad \phi \leq \frac{1}{2} \quad (8.1.4)$$

Barevnen bestemt ved (8.1.2) og (8.1.4) kan også opnås ved kombinerede belastninger, idet der kan opbygges en trykbue i stil med den på figur 8.1 viste, når belastningen udgøres af flere enkeltkræfter. I den viste spændingsfordeling regnes med toakset



Figur 8.2. Bjælkegeometri, mål i mm.

Der regnes med kontrolklasse II, så de regningsmæssige styrker er

$$\sigma'_{br} = \frac{1}{1,8} \cdot 30 \text{ MPa} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{br} = \frac{1}{1,8} \cdot 1,8 \text{ MPa} = 1,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{ar} = \frac{1}{1,4} \cdot 420 \text{ MPa} = 300 \text{ MPa}$$

Længdearmeringen består af 3 stk. Ø 16, hvorved armeringsprocenten bliver

$$\varphi_{al} = \frac{3 \cdot \left(\frac{16}{2}\right)^2 \cdot \pi}{250 \cdot 400} \cdot 100\% = 0,603 \%$$

Derefter kan effektivitetskoefficienten findes af (7.2.13), idet  $\sigma'_{bk}$  indsættes som betonens trykstyrke:

$$\nu = \frac{0,49}{\sqrt{30}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0,4}}\right) (1 + 0,26 \cdot 0,603) = 0,27$$

Den regningsmæssige, effektive betonstyrke er altså 0,27  $\sigma'_{br}$ , så armeringsgraden bliver:

$$\phi = 0,603 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{400 \text{ MPa}}{0,27 \cdot 16,7 \text{ MPa}} = 0,401$$

Det bemærkes, at  $\lambda$  og  $\gamma$  er valgt i overensstemmelse med (8.1.6) - (8.1.7), så det maksimale moment, der tillades at optræde i bjælken, findes af (8.1.4):

$$M = 0,401(1 - 0,401) \cdot 250 \cdot 400^2 \cdot 0,27 \cdot 16,7 \text{ Nmm}$$

$$M = 43,3 \text{ kNm}$$

(8.1.8)

I henhold til DS 411, metode A, findes brudmomentet til

$$M = 52,2 \text{ kNm}$$

(8.1.9)

Dette sidste forudsætter, at forskydningskapaciteten er tilstrækkelig. Tages der ikke hensyn til normens krav om minimal bøjlearmering, er forskydningskapaciteten til stede, hvis forskydningspændingen i et snit i afstanden  $h_1$  fra lejekanten ikke overstiger

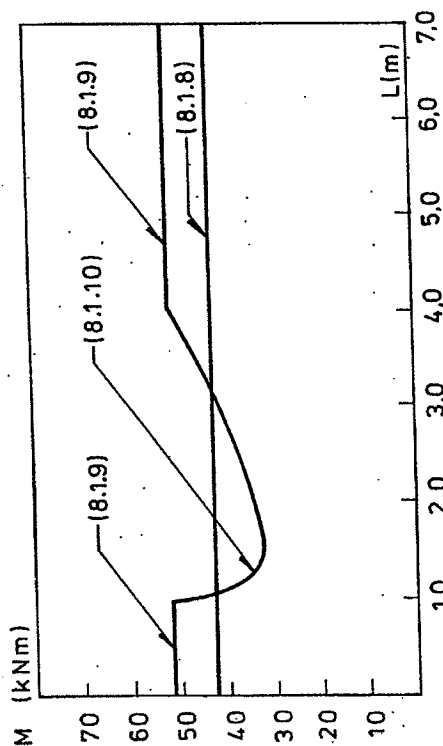
$$\tau_{br} = 0,5 \sigma'_{br} = 0,5 \text{ MPa}$$

Med  $h_1 = 333 \text{ mm}$  betyder dette, at når bjælken er påvirket af en jævn belastning som vist på figur 8.2, kan momentet i bjælken midte ikke overstige

$$M = \frac{1}{8} \cdot \frac{250 \cdot 333 \cdot 0,5 \text{ N}}{2} \cdot L^2 = \frac{1}{2} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 333 \text{ mm} \cdot L^2$$

(8.1.10)

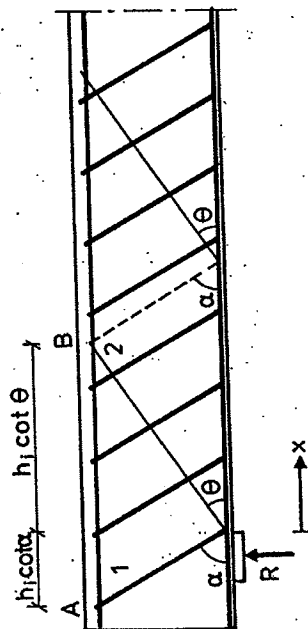
på figur 8.3 ses en sammenligning mellem resultaterne af de to metoder for varierende spændvidde.



Figur 8.3. Sammenligning af beregningsmetoder.

## 8.2 Bjælker med forskydningsarmering.

Til opstilling af en generel designmetode for forskydningsarmerede bjælker tages udgangspunkt i nedrevardiløsningen fra afsnit 5.4.1, idet der i det væsentlige følges samme principper som i [78.1].



Figur 8.4.

Såfremt den ydre belastning kan regnes jævnt fordelt over strækningen AB, vil den samlede reaktion overføres til betonen i bjæl-

kekroppen over længden  $h_1(\cot\theta + \cot\alpha)$ , således at det for at undgå trykbrud i kroppen må kræves, at

$$b h_1 f_c^* \sin^2\theta (\cot\theta + \cot\alpha) \geq R \quad (8.2.1)$$

Dette er ensbetydende med at kræve, at  $\cot\theta$  ikke overstiger værdien

$$\kappa \leq \frac{1}{2R} [b h_1 f_c^* + \sqrt{(b h_1 f_c^*)^2 - 4R(R - \mu b h_1 f_c^*)}] \quad (8.2.2)$$

idet der er indført betegnelserne

$$\kappa = \cot\theta \quad (8.2.3)$$

$$\mu = \cot\alpha \quad (8.2.4)$$

Hvis lasten ikke er fordelt hen over vederlaget, kan betingelsen (8.2.2) findes ved at kræve, at reaktionen skal kunne optages af forskydningsspændingerne i snittet foran lejet

$$b h_1 (f_c^* \sin\theta \cos\theta + \psi f_c^* \sin\theta \cos\theta) \geq R$$

Heri indsættes så den tilhørende randbetingelse langs stringerne

$$\psi f_c^* \sin^2\alpha = f_c^* \sin^2\theta$$

hvorved man atter ledes til (8.2.1) og dermed videre til (8.2.2). Udtrykket (8.2.2) bør suppleres med et krav til  $\kappa$ , således at der i brugstadiet ikke opstår acceptabelt store revner i forskydningszonen på grund af flydning i bøjlerne. Sikkerhed heri mod er i [78.4] vist at være til stede i alle tilfælde, såfremt

$$\kappa \leq 2 \quad (8.2.5)$$

Når  $\kappa$  er valgt, så både (8.2.2) og (8.2.5) er opfyldt, inddeles bjælken i sektioner, som det er vist på figur 8.5. Her er



afstanden fra lejekant til første delepunkt  $kh_1$ , og derefter følger i første omgang delepunkter med en indbyrdes afstand på  $(\kappa + \mu)h_1$ , indtil afstanden fra sidste delepunkt til momentmaximum, hvor  $\tau = 0$ , er mindre end  $(\kappa + \mu)h_1$ . Endvidere indføres delepunkter, hvor der er diskontinuiteter i kurven over den for-melle forskydningspænding,  $\tau$ , eller hvor der er nedadrettede knæk på kurven, svarende til stigning i lastintensiteten ud mod momentmaximum. Den fordelte last må ved denne metode regnes stykkevis konstant. De fundne delepunkter betegnes  $B'_j$ , ( $j = 0, 1, 2 \dots n$ ), og inden for hvert interval  $B'_j - B'_{j+1}$  bestemmes hjælpestrørelsen  $\tau'$  som den mindste værdi af  $\tau$  inden for intervallet, se dog på figur 8.5 de særlige forhold ved enkeltlasten. Herefter findes et nyt sæt delepunkter  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2 \dots n$ ), som for  $j \geq 1$  er for-skudt stykket  $\mu h_1$  ud af bjælkeaksen i forhold til de tilsvarende punkter,  $B'_j$ . Punkterne  $B_0$  og  $B'_0$  er sammenfaldende ved leje-kant. I hvert enkelt af intervallerne  $B_j - B_{j+1}$  målt langs hoved-armeringen kan den nødvendige forskydningsarmeringsgrad nu bestem-mes ved

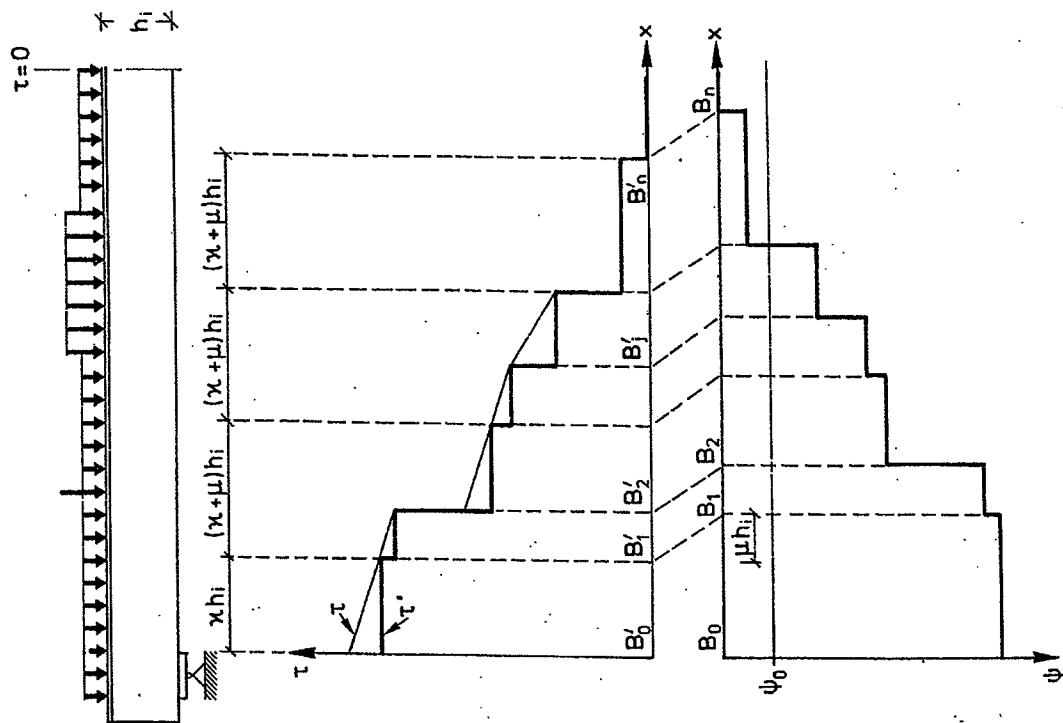
$$\psi \sin^2 \alpha = \frac{\tau'}{(\kappa + \mu) f_c} \quad (8.2.6)$$

For at undgå krydsende bjæller ved momentmaximum kan det være nød-vendigt at ændre længden af det sidste interval til  $(\kappa' + \mu)h_1$ , således at det sidste delepunkt,  $B'_n$ , ligger i en afstand fra mo-mentmaximum på  $\mu h_1$ . Ved beregning af  $\psi$  i intervallet  $B_{n-1} - B_n$  erstattes  $\kappa$  så med  $\kappa'$  ved indsættelse i (8.2.6). I reglen vil det dog være unødvendigt at beregne  $\psi$  helt ud til bjælakens mo-mentmaximum, fordi der mindst kræves en armeringsgrad af størrel-sen  $\psi_0$  i henhold til normens krav om minimumsarmering.

Hvad angår forholdene over vederlaget og optagelsen af stringer-kræfterne i zonen bag lejet, bør der i forhold til det i kapitel 5 fundne tages hensyn til, at betonen ikke nødvendigvis er fuldt udnyttet i forskydningsfaget, således vil det ønskede tryk i om-råde 1 fra figur 8.4 blive  $\sigma_b < f_c^*$ , når  $\kappa$  vælges mindre end den øvre grænse fra (8.2.2). Det aktuelle betontryk bestemmes ved modifikation af randbetingelsen (5.4.2):

$$\sigma_b \sin^2 \theta - \psi f_c^* \sin^2 \alpha = p \quad (8.2.7)$$

hvor  $p$  er lastintensiteten over strækningen AB på figur 8.4.



Figur 8.5. Hjælpediagram til forskydningsdimensionering.

Forskydningskraften i snittet foran vederlaget kan med god tilnærmelse sættes lig med reaktionens, så kraften  $T_0$  i trækstringen kan findes ved momentligevægt for det på figur 8.6 viste kraftsystem, hvor

$$\frac{N}{bh_1} = \sigma_b \cos^2 \theta - \psi f_c^* \cos^2 \alpha \quad (8.2.8)$$

er den vandrette resultant af betontrykket og bøjlekræfterne. Desuden findes tilnærmelsen

$$\frac{R}{bh_1} = \sigma_b \sin \theta \cos \theta + \psi f_c^* \sin \alpha \cos \alpha \quad (8.2.9)$$

Herefter omskrives (8.2.8) til

$$\begin{aligned} \frac{N}{bh_1} &= \sigma_b \cos^2 \theta - \sigma_b \cos \theta \sin \theta \cot \alpha + \psi f_c^* \cos \alpha \sin \alpha \cot \alpha \\ &\quad - \psi f_c^* \cos^2 \alpha + \cot \alpha \cot \theta (\sigma_b \sin^2 \theta - \psi f_c^* \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

hvorefter anvendelse af (8.2.7) og (8.2.9) leder til

$$N = R(\kappa - \mu) + p b h_1 \kappa \mu \quad (8.2.10)$$

Momentligevægten om punkt D på figur 8.6, der lyder

$$\frac{1}{2} R R + \frac{1}{2} h_1 N - h_1 T_0 = 0$$

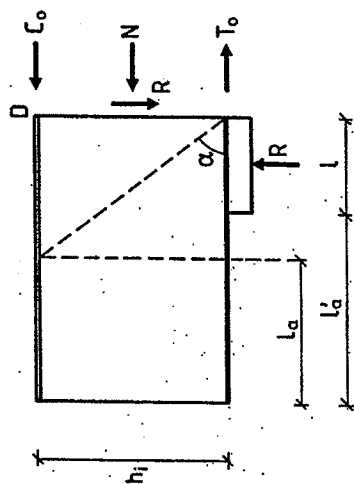
bliver derfor ensbetydende med, at

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{R}{h_1} R + \frac{1}{2} R(\kappa - \mu) + \frac{1}{2} p b h_1 \kappa \mu \quad (8.2.11)$$

Denne kraft skal forankres over strækningen  $l_a$ , der dog ikke må regnes større end  $l'_a$ , når den aktive vederlagslængde bestemmes ved

$$l = \frac{R}{b f_c^*} \quad (8.2.12)$$

Er forankringszonen forsynet med lodrette bøjler, så forskydnings-



Figur 8.6: Vederlag og forankringszone.

armeringsgraden er  $\psi_a$ , bestemmes den mindst mulige værdi af  $l_a$  ved:

$$l_a = \frac{T_0}{b f_c^* \psi_a (1 - \psi_a)} \quad (8.2.13)$$

Hermed vil også forankringen af kraften i trykstringen være sikret.

I snittet foran lejet findes ved projektion:

$$C_0 = \frac{1}{2} \frac{R}{h_1} R - \frac{1}{2} R(\kappa - \mu) - \frac{1}{2} p b h_1 \kappa \mu \quad (8.2.14)$$

Denne størrelse er negativ for moderate lejevædder, således at trykstringen er trækpåvirket over lejet. For skrå bøjler er det ikke tilstrækkeligt at dimensionere oversidearmeringen for kraften  $C_0$ , se f.eks. figur 5.21. Undersøges spændingsfordelingerne fra denne figur, viser det sig, at for  $\mu \leq \kappa$  optræder den mindste trykstringekraft, og dermed det største træk i punkt B. I dette punkt bliver stringerkraften tilnærmelsesvis

$$C_{MIN} = C_0 - \mu R, \quad \mu \leq \frac{1}{K} \quad (8.2.15)$$

$$C_{MIN} = C_0 - \frac{1}{K} R, \quad \mu \geq \frac{1}{K} \quad (8.2.16)$$

Det nævnte krav,  $\mu \leq K$ , vil normalt være opfyldt.

Til brug for en eventuel graduering af stringernes styrke langs bjælkeaksen, kan formlerne (8.2.11) og (8.2.14) med god tilnærmelse generaliseres, således at der i et snit med momentet  $M$  og forskydningskraften  $Q$ , findes stringerkræfterne:

$$T = \frac{M}{h_1} + \frac{1}{2} Q (K - \mu) + \frac{1}{2} p b h_1 K \mu \quad (8.2.17)$$

$$C = \frac{M}{h_1} - \frac{1}{2} Q (K - \mu) - \frac{1}{2} p b h_1 K \mu \quad (8.2.18)$$

Disse formler er kun fuldt korrekte, hvis belastningen udgøres af den jævnt fordelte last,  $p$ . Såfremt den ydre last varierer langs bjælkeaksen, foreslås det at anvende (8.2.17) og (8.2.18) i delpunkterne  $B_j$  fra figur 8.5, idet der for  $p$  indsættes middelværdien af lastintensiteten i intervallet  $B_j - B_{j+1}$ . Mellem delpunkterne interpoleres de fundne kræfter så retlinet.

Når maksimalmomentet i bjælken er  $M_{MAX}$ , vil en sædvanlig bjørningsberegning lede til følgende maximalværdier for stringerkræfterne:

$$T_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{h_1} \quad (8.2.19)$$

$$C_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{h_1} \quad (8.2.20)$$

Af (8.2.17) ses, at hvis lastintensiteten er stor nær momentmaksimum, bliver kraften i trækstringeren større end, hvad der findes af (8.2.19). Se endvidere figur 5.11. Ved forsøg med koncentreret last på jernbetonbjælker synes der imidlertid aldrig at være konstateret en bæreevnereduktion, selv om (8.2.19) er anvendt i stedet for (8.2.17) under dimensioneringen af forsøgsbjælken.

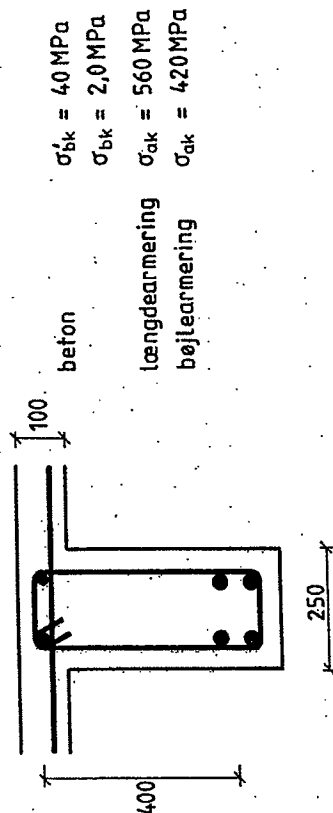
Dette skyldes antagelig, at hovedarmering og trykzone aldrig er ideelle stringere som forudsat i teorien. For bjælker må det der-

for normalt anses for tilstrækkeligt at dimensionere hovedarmeringen for størsteværdien, (8.2.19). Ved bjælker med stor lastintensitet nær momentmaksimum bør det dog kontrolleres, at (8.2.17) ikke leder til væsentligt større krav end (8.2.19).

Den her gennemgåede designmetode kan også udstrækkes til kontinuerlige bjælker, blot reaktionen  $R$  i formlerne erstattes af forskydningskraften  $Q_{MAX}$ , som optræder ved vederlagene. Den fejl, som herved introduceres ved bjælker med skrå bøjler under bestemmelsen af den maksimalt tilladelige værdi af  $K$ , vil normalt være ubetydelig.

### 8.2.1 Eksempel.

Der betragtes en bjælke, der mellem en understøtning og momentmaksimum er påvirket af belastningen vist øverst på figur 8.8. Bjælkenes tværsnitsgeometri og de karakteristiske materialestyrker fremgår af figur 8.7.



Figur 8.7. Tværsnitsdata for bjælke. Mål i mm.

Der regnes med kontrolklasse II, så de regningsmæssige styrker er

$$\sigma'_{br} = \frac{1}{1,8} \cdot 40 \text{ MPa} = 22,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{br} = \frac{1}{1,8} \cdot 2,0 \text{ MPa} = 1,1 \text{ MPa}$$



Normens krav om minimumsarmering skal dog opfyldes, således at der intet sted regnes med en armeringsgrad, der er mindre end

$$\psi_o = 0,2 \cdot \frac{\sigma_{bk}}{\sigma_{ak}} \cdot \frac{\sigma_{ar}}{\sigma_{br}} = 0,026$$

Da intervallet  $B_2 - B_3$  er relativt kort, vælges det i dette interval at holde samme armeringsgrad som i intervallet  $B_1 - B_2$ .

Når forskydningsarmeringen udføres af to-snitbøjler, som vist på figur 8.7, skal afstanden  $c$  mellem bøjlerne opfylde betingelsen

$$c \leq \frac{2 \cdot \pi \cdot (d_a)^2 \cdot \sigma_{ar}}{b \cdot \psi \cdot v \cdot \sigma_{br}}$$

Idet  $d_a$  betegner bøjlerens diameter. Herved kan et passende armeringsarrangement udføres således:

$$B_0 - B_1 : d_a = 10 \text{ mm} , \quad c = 133 \text{ mm}$$

$$B_1 - B_3 : d_a = 10 \text{ mm} , \quad c = 170 \text{ mm}$$

$$B_3 - B_5 : d_a = 6 \text{ mm} , \quad c = 225 \text{ mm}$$

Med disse mål opnås en bekvem fordeling af bøjlerne, som vist nedest på figur 8.8.

Den nødvendige lejevidde findes af (8.2.12) til

$$l = 123 \text{ mm}$$

og videre findes trækstringerkraften,  $T_o$ , i snittet foran lejet af (8.2.11)

$$T_o = 392 \text{ kN}$$

For at sikre forankringen af denne kraft kan forankringszonen bag lejet eksempelvis forsynes med to-snitbøjler med  $d_a = 10 \text{ mm}$  og med en indbyrdes afstand  $c = 65 \text{ mm}$ . Herved bliver

$$\psi_a = 0,261$$

så af (8.2.13) findes den nødvendige længde af forankringszonen:

$$l_a = 322 \text{ mm}$$

Den største kraft i trækstringeren findes af (8.2.19):

$$T_{MAX} = 1275 \text{ kN}$$

hvilket kan optages af en hovedarmering bestående af 4ø32, da denne armerings regningsmæssige styrke er  $\sigma_{ar} = 400 \text{ MPa}$ .

Eftersom  $\mu = 0$ , bestemmes den mindste trykstringerkraft af (8.2.14):

$$C_o = -288 \text{ kN}$$

Dette betyder, at der skal ilægges en oversidearmering hen over lejet, som kan optage en trækraft på 288 kN. Denne oversidearmering kan eksempelvis udføres af 2ø22 med  $\sigma_{ar} = 400 \text{ MPa}$ . Den benyttede langdearmering skal være forankret.

## 9. RESUMÉ OG KONKLUSION

I rapporten er skiver og bjælker af jernbeton behandlet i brudstadiet ad teoretisk vej, idet de indgående materialer, beton og armeringstål antages stift, ideelt plastiske. Som flydebetingelse for betonen vælges Coulombs modificerede brudhypotese, hvor betonen ikke tillægges nogen trækstyrke. Endvidere forudsættes plan spændingstilstand i både skiver og bjælker, der således betragtes som idealiserede skiver.

Før de egentlige skive- og bjælkeproblemer tages under behandling, gennemgås brudlinier i betonskiver på mere generel form. Gennem en variationsanalyse findes hyperblien som en mulig brudlinieform mellem to skivedele, der undergår en vilkårlig, relativ stiftlegemebevægelse i planen, og der angives et simpelt, generelt udtryk for disipationen stammende fra et sådant brudlinieafsnit. De fundne hyperbler har asymptoter, der står vinkelret på hinanden i omdrejningscentret for den relative bevægelse. Det vises, at spændingstilstanden langs en sådan hyperbelformet brudlinie udgøres af et énaksset tryk rettet parallelt med en af hyperblens asymptoter. I visse tilfælde kan en hyperbel af nævnte type ikke dannes, og da udgøres brudlinierne af polstråler udgående fra den relative bevægelses omdrejningscenter.

I forlængelse af behandlingen af brudlinier i betonskiver indeholder rapporten også en kort gennemgang af brudlinier i skiver af andre materialer, nemlig vilkårlige Coulombmaterialer, Tresca-materialer og v. Mises-materialer.

I kapitlet om skiver og bjælker uden forskydningsarmering behandles koncentreret last, jævnt fordelt last samt kombineret koncentreret last og central normalkraft. Af disse tre lasttilfælde gennemgås det første som basalt tilfælde særligt grundigt, og i den opstillede løsning tages eksempelvis hensyn til såvel lejeværdien som længdearmerings placering. Løsningerne for de to andre lasttilfælde er ikke så komplette, blandt andet mangler i begge tilfælde en anvendelig øvrevarildiløsning for overarmerede skiver, det vil sige skiver, hvor længdearmeringen ikke udnyttes til flydning ved brud i skiven.

Kapitlet om forskydningsarmerede skiver og bjælker behandler koncentreret last og jævnt fordelt last. Der betragtes forskydningsarmering

i form af bøjler, lodrette såvel som skrå. Som noget nyt indeholder kapitlet en forbedret nedrevardiløsning for koncentreret last på skiver med lille spændvidde, og for det samme lasttilfælde analyseres længdearmeringens indflydelse på bæreevnen.

Betydningen af betonens trækstyrke gennemgås i kapitel 6 ved koncentreret last på en skive uden forskydningsarmering. Det fremgår af løsningen, at effekten af en indregnet begrænset trækstyrke er analog til effekten opnået ved indstøbning af en svag forskydningsarmering.

Nogle af de præsenterede løsninger er sammenlignet med bjælkeforsøg i kapitel 7. Det viser sig nødvendigt at bestemme den aktuelle betonstrøke i bjælken som cylindrestyrken reduceret med en effektivitetstfaktor, kaldet v. Denne effektivitetstfaktor bestemmes empirisk ved at sammenholde de teoretiske løsninger med resultaterne fra tilsvarende forsøg.

For at opnå rimelig overensstemmelse mellem forsøgsresultaterne og den ved v korrigerede teoretiske løsning for bjælker uden forskydningsarmering, må effektivitetstfaktoren fastlægges som en funktion, der i væsentlig grad varierer med forskellige karakteristiske parametre, og som endda er forskellig fra lasttilfælde til lasttilfælde. Det må således erkendes, at den teoretiske model ikke muliggør en fyldstgørende redegørelse for brudstadiet ad rationel vej for denne bjælketype. Løsningerne bør dog alligevel kunne finde praktisk anvendelse gennem en tilpas konservativ fastlæggelse af effektivitetstfaktoren.

Ved bjælker forsynet med forskydningsarmering observeres adskilligt bedre overensstemmelse mellem teori og forsøg. Også her er korrelation med en effektivitetstfaktor nødvendig, men ved denne bjælketype synes kun en afhængighed med betonstyrken at være nødvendig for at sikre acceptable nøjagtigheder. Den pågældende variation af v med betonstyrken afspejler betonens aftagende plasticitet med stigende styrke. Med sigte på de praktiske anvendelser foreslås i nærværende rapport at indføre et minimumskrav til forskydningsarmeringen for at tillade en bjælke betraget beregningsmæssigt som forskydningsarmeret. Dette forslag, der er i overensstemmelse med eksisterende normkrav, udspringer af den endnu ufuldstændige analyse af overgangen til bjælker helt uden forskydningsarmering og den

mere problematiske behandling af denne sidstnævnte bjælketype.

I kapitel 8 demonstreres sluttelig, hvorledes der kan udvikles en designmetode, som baserer sig på det teoretiske arbejde i sammenhang med de empiriske resultater.

# 10. NOTATION

Bortset fra sædvanlige betegnelser for tøjninger og spændinger er de vigtigste symboler omfattet af nedenstående liste i de oftest anvendte betydninger.

$A_L$	: Længdearmeringens tværsnitsareal
$A_S$	: Bøjlearmeringens tværsnitsareal
$a$	: Forskydningspændvidde
$b$	: Skivetykkelse, bjælke Kroppens bredde
$C$	: Kraft i trykstringer
$c$	: Bøjleafstand
$c_1, c_i$	: Arbitrære konstanter i brudliniebeskrivelse
$c_2, c_j$	: Arbitrære konstanter i brudliniebeskrivelse
$d$	: Brudliniens kordelængde
$\bar{d}$	: Udstrækning af trykzone
$f_c$	: Betonens cylindertrykstyrke
$f_c^*$	: Effektiv trykstyrke
$f_t^*$	: Effektiv trækstyrke
$f_{yL}$	: Længdearmeringens flydespænding
$f_{ys}$	: Bøjlearmeringens flydespænding
$h$	: Skivehøjde
$h_i$	: Indre momentarm i bjælke
$k$	: $(1 + \sin\phi)/(1 - \sin\phi)$
$k$	: Lastpladelængde
$l$	: Lejevidde
$M$	: Moment
$N$	: Normalkraft
$p$	: Koncentreret last
$p$	: Fordelt last pr. arealenhed
$Q$	: Forskydningskraft

R	: Reaktion
r	: Radiarkoordinat i polar beskrivelse
T	: Kraft i trækstringer
w <sub>E</sub>	: Ydre arbejde
w <sub>I</sub>	: Indre arbejde
Y	: Armeringens højde over skivebund
$\alpha$	: Fri vinkel
$\alpha$	: Bøjlehalvning
$\beta$	: Fri vinkel
$\delta$	: Relativ bevægelse i brudlinje
$\eta$	: Relativ drejning mellem skivedele
$\theta$	: Vinkelkoordinat i polar beskrivelse
$\theta$	: Betontrykrets hældning i skivekrop
$\kappa$	: Mål for betontrykrets hældning ( $\kappa = \cot\theta$ )
$\lambda$	: $1 - \rho(k - 1)$
$\mu$	: $1 - \rho(k + 1)$
$\mu$	: Mål for bøjlehalvningen ( $\mu = \cot\alpha$ )
$\nu$	: Betonens effektivitetskoefficient
$\pi$	: $N/(bh)$
$\rho$	: $f_t^*/f_c^*$
$\sigma_b$	: Trykspænding i beton
$\tau$	: Formel forskydningspænding ( $\tau = Q/(bh)$ )
$\phi$	: Mekanisk længdearmeringsgrad ( $\phi = \varphi_{al} f_{yl}/f_c^*$ )
$\phi$	: Betonens friktionsvinkel
$\varphi_a$	: Geometrisk forskydningsarmeringsgrad
$\varphi_{al}$	: Geometrisk længdearmeringsgrad ( $\varphi_{al} = A_{al}/(bh)$ )
$\psi$	: Mekanisk forskydningsarmeringsgrad ( $\psi = \varphi_a f_{ys}/f_c^*$ )

# 11. REFERENCER

- [59.1] Prager, W.: "An Introduction to Plasticity". Addison-Wesley Publishing Company Inc., London 1959.
- [60.1] Cossio, R.D., C.P. Siess: "Behavior and Strength in Shear of Beams and Frames without Web Reinforcement". Proceedings, American Concrete Institute, Vol. 56, 1959-1960, pp. 695-735.
- [61.1] Drucker, D.C.: "On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis". Særlig fra IABSE-Publications, Vol. 21, Zürich, 1961.
- [62.1] Risch, H., F.R. Haugli, H. Mayer: "Schubversuche an Stahlbeton - Rechteckbalken mit gleichmäßig verteilter Belastung". Deutsche Ausschuss für Stahlbeton, Heft 145, Berlin 1962, pp. 5-30.
- [66.1] Krefeld, W.J., C.W. Thurston: "Studies of the Shear and Diagonal Tension Strength of Simply Supported Reinforced Concrete Beams". Journal of the American Concrete Institute, Vol. 63, 1966, No. 3, pp. 325-344.
- [67.1] Nielsen, M.P.: "Om forskydningsarmering i jernbetonbjælker". Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 40, nr. 1, 1969, pp. 55-63.
- [67.2] Özden, K.: "An experimental investigation of the shear strength of reinforced concrete beams". Technical University of Istanbul, Faculty of Civil Engineering, 1967.
- [71.1] Nielsen, M.P.: "On the strength of reinforced concrete discs". Acta Polytechnica Scandinavica, nr. C1 70, København 1971.
- [71.2] Sørensen, H.C.: "Forskydningsforsøg med 12 jernbetonbjælker med T-tværsnit". Rapport nr. R 20, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1971.
- [73.1] Hansen, E.: "Variationsregning". Polyteknisk Forlag, 1973.
- [73.2] Numerisk Institut: "Nulpunkter for funktioner". Numerisk Institut, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1973.



- [73.3] Dansk Ingeniørforening: "Norm for betonkonstruktioner". Dansk Standard, DS 411. "Vejledning til norm for betonkonstruktioner". 2. udgave, Tekniske Forlag, København, 1973.
- [73.4] Lange-Hansen, P.: "Generel Plasticitetsteori for idealt Plastiske materialer og konstruktioner". Forelæsningsnotat nr. F 19 og F 20, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1973.
- [76.1] Lyngberg, B.S.: "Ultimate Shear Resistance of Partially Prestressed Reinforced Concrete Beams". Journal of the American Concrete Institute, Vol. 73, No. 4, 1976, pp. 214-222.
- [76.2] Jensen, B.C.: "Nogle plasticitetsteoretiske beregninger af beton og jernbeton". Rapport nr. 111, Institut for Husbygning, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1976.
- [76.3] Bråstrup, M.W., M.P. Nielsen, F. Bach, B.C. Jensen: "Shear Tests on Reinforced Concrete T-Beams. Series T". Rapport nr. R 72, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1976.
- [77.1] Nielsen, M.P., L. Pilegaard Hansen, A. Rathkjen: "Mekanik 2.2, del 2". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1977.
- [78.1] Nielsen, M.P., M.B. Bråstrup, B.C. Jensen, F. Bach: "Concrete Plasticity". Specialpublikation, Dansk Selskab for Bygningstatik, Lyngby, 1978.
- [78.2] Müller, P.: "Plastische Berechnung von Stahlbetonschreien und -balken". Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich 1978.
- [78.3] Jensen, J.F., C. Pedersen, M.W. Bråstrup, F. Bach, M.P. Nielsen: "Rapport over forskningsforsøg med 6 spændebetonbjælker". Rapport nr. R 102, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1978.
- [78.4] Jensen, J.F., V. Jensen, H.H. Christensen, F. Bach, M.W. Bråstrup, M.P. Nielsen: "On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range". Rapport nr. R 103, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1978.

- [79.1] Roikjær, M., C. Pedersen, M.W. Bråstrup, M.P. Nielsen, F. Bach: "Bestemmelse af ikke-forskydningsarmerede bjælkers forskydningsbæreevne". Rapport nr. I 62, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1979.
- [79.2] Exner, H.: "On the effectiveness factor in plastic analysis of concrete". Final Report, Plasticity in Reinforced Concrete, IABSE Colloquium Copenhagen 1979, Zürich, 1979, pp. 263-272.
- [80.1] Nielsen, M.P., F. Bach: "Beregning af forskydningsarmering efter diagonaltrykmotoden". foreløbigt manuskript, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1980.
- [80.2] Bach, F., M.P. Nielsen, M.W. Bråstrup: "Shear Tests on Reinforced Concrete T-Beams. Series V, U, X, B and S". Rapport nr. R 120, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby, 1980.

Serie R  
(Tidligere: Rapporter)

- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSEAARD, SØREN SKYTTÉ: Ligevektselementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRØSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbæreevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbruget for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIEBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.
- R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
- R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980. Uds.
- R 117. BRYDER, KAJ L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projektering von vorgespannten Brückenträgern. 1980.
- R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
- R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRØSTRUP: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.
- R 121. Resumeoversigt 1979. Summaries of papers 1979. 1980.
- R 122. NIELSEN, J.A., F. JOHNSEN og N.J. GIMSING: Trykkede plader af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 123. KRAGERUP, JAN: Undersøgelse af stålnormens metoder til bestemmelse af bæreevnen af geometrisk imperfekte stålstøtler. 1980.
- R 124. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstenene. 1. del. Matematiske modeller. 1980. Uds.
- R 125. HANSEN, SVEND OLE: Vindbelastede skorstenene. 2. del. Stignas skorstenen. 1980. Uds.
- R 126. GIMSING, NIELS J.: Four papers on cable supported bridges. 1980.

- R 127. SVENSSON, SVEN EILIF og JAN KRAGERUP: Interaktiv bæreevne af sammensatte søjler. 1980.
- R 128. GIMSING, NIELS J. og JØRGEN GIMSING: Analysis of erection procedures for bridges with combined cable systems. Cable net bridge concept. 1980.
- R 129. ROSTAM, STEEN og EIGIL STEEN PEDERSEN: Partially prestressed concrete bridges. Danish experience. 1980.
- R 130. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of cracked arbitrary concrete section under service load. 1981.
- R 131. Reserveret.
- R 132. Reserveret.
- R 133. Reserveret.
- R 134. ASK's informationsdag 1981. 1981.
- R 135. Resumeoversigt 1980. Summaries of papers 1980. 1981.
- R 136. BACH, FINN og M.P. NIELSEN: Nedreværdiløsninger for jernbetonplader. 1981.
- R 137. RASMUSSEN, JENS, SØREN B. CHRISTENSEN, HANS EXNER og M.P. NIELSEN: Plasticitetsteoretisk analyse af beregningsmetoder for jernbetonbjælkers forskydningsbæreevne. 1981.
- R 138. NIELSEN, EILIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Elementmetodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
- R 139. MONDORF, P.E.: Concrete bridges. Literature index. 1981.
- R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's problem. Internal harmonic point load in a half-space. 1981.
- R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
- R 142. MØLLMANN, H.: Thin-walled elastic beams with finite displacements. 1981.
- R 143. KRAGERUP, JAN: Five notes on plate buckling. 1982.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til  
Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Danmarks tekniske Højskole  
Bygning 118  
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af  
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn: .....  
Adresse: .....  
Postnr. og -distrikt: .....

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:  
Department of Structural Engineering  
Technical University of Denmark  
Building 118  
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's

List of Summaries:

(Please complete in block letters)

Title and name .....

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....